Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования «Воронежский экономико-правовой институт» (АНОО ВО «ВЭПИ»)

АНОО ВО "ВОРОНЕЖСКИЙ ЭКОНОМИКО-ПРАВОВОЙ ИНСТИТУТ", АНОО ВО "ВЭПИ", ВЭПИ

Подписано цифровой подписью: АНОО ВО "ВОРОНЕЖСКИЙ ЭКОНОМИКО-ПРАВОВОЙ ИНСТИТУТ", АНОО ВО "ВЭПИ", ВЭПИ
Дата: 2023.09.01 11:43:14 +03'00'

УТВЕРЖДАЮ
Проректор
по учебно-методической работе
_________ А.Ю. Жильников
«22» января 2018 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Б1.Б.09 Линейная алгебра
(наименование дисциплины (модуля))

38.03.01 Экономика
(код и наименование направления подготовки)

Направленность (профиль) Бухгалтерский учет, анализ и аудит
(наименование направленности (профиля))

Квалификация выпускника Бакалавр
(наименование квалификации)

Форма обучения Очная, заочная
(очная, заочная)

Рекомендован к использованию Филиалами АНОО ВО «ВЭПИ»

Воронеж
2018

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) рассмотрен и одобрен на заседании кафедры прикладной информатики.

Протокол от «17» января 2018 г. № 6

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) согласован со следующими представителями работодателей или их объединений, направление деятельности которых соответствует области профессиональной деятельности, к которой готовятся обучающиеся:

1. Заместитель генерального директора по финансовым вопросам ООО УК «Агрокультура» Хорохордин Д.Н. 19.01.2018

(должность, наименование организации, фамилия, инициалы, подпись, дата, печать)

2. Бухгалтер ООО «БУХПРОФИ» Семейкина Н.П. 19.01.2018

(должность, наименование организации, фамилия, инициалы, подпись, дата, печать)

Заведующий кафедрой Г.А. Курина

Разработчики:

Доцент Г.А. Курина

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения ОП ВО

Целью проведения дисциплины Б1.Б.09 Линейная алгебра является достижение следующих результатов обучения:

Код компетенции	Наименование компетенции
ОК-7	способностью к самоорганизации и самообразованию
ОПК-2	способностью осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач
ОПК-3	способностью выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы

В формировании данных компетенций также участвуют следующие дисциплины (модули), практики и ГИА образовательной программы (по семестрам (курсам) их изучения):

- для очной формы обучения:

Наименование дисциплин (модулей), практик, ГИА	Этапы формирования компетенций по семестрам изучения							
	1 сем.	2 сем.	3 сем.	4 сем.	5 сем.	6 сем.	7 сем.	8 сем.
История		ОК-7						
Иностранный язык	ОК-7	ОК-7						
Право		ОК-7						
Логика		ОПК-2						
Математический анализ	ОК-7, ОПК-2, ОПК-3	ОК-7, ОПК-2, ОПК-3						
Линейная алгебра	ОК-7; ОПК-2; ОПК-3	ОК-7; ОПК-2; ОПК-3						
Теория вероятностей и математическая статистика			ОПК-2, ОПК-3					
Эконометрика					ОПК-2			
Методы оптимальных решений			ОПК-3					
Микроэкономика	ОК-7							
Макроэкономика		ОК-7						
Статистика				ОПК-2				
Бухгалтерский учёт и анализ			ОПК-2	ОПК-2				
Менеджмент						ОПК-2, ОПК-3		
Маркетинг				ОПК-3				
Физическая культура и спорт	ОК-7							
Информатика	ОПК-3							
Информационные технологии в экономике					ОПК-3	ОПК-3		
Аудит							ОПК-3	ОПК-3
Финансовый анализ							ОПК-3	ОПК-3
Учет и анализ банкротств							ОПК-3	ОПК-3
Финансовая математика				ОПК-2				
Бухгалтерский управленческий учет						ОПК-2		
Комплексный анализ хозяйственной деятельности					ОПК-2	ОПК-2		
Экономика труда							ОПК-2	
Бухгалтерское дело								ОПК-2
Анализ финансовой отчетности							ОПК-2	
Оценка бизнеса							ОПК-2	

Экономическая информатика	ОПК-2							
Экономические информационные системы	ОПК-2							
Финансовый менеджмент							ОПК-2	
Финансовые вычисления в коммерческих расчетах							ОПК-2	
Теория экономического анализа			ОПК-2					
Лабораторный практикум по статистике			ОПК-2					
Учебная практика (практика по получению первичных профессиональных умений и навыков, в том числе первичных умений и навыков научно-исследовательской деятельности)				ОК-7				
Права человека					ОК-7			
Производственная практика (преддипломная практика)								ОПК-2, ОПК-3
Защита выпускной квалификационной работы, включая подготовку к процедуре защиты и процедуру защиты								ОК-7, ОПК-2, ОПК-3
Подготовка публичной защиты ВКР								ОК-7

- для заочной формы обучения:

Наименование дисциплин (модулей), практик, ГИА	Этапы формирования компетенций по семестрам изучения				
	1 курс	2 курс	3 курс	4 курс	5 курс
История	ОК-7				
Иностранный язык	ОК-7	ОК-7			
Право	ОК-7				
Логика	ОПК-2				
Математический анализ	ОК-7, ОПК-2, ОПК-3				
Линейная алгебра	ОК-7; ОПК-2; ОПК-3				
Теория вероятностей и математическая статистика		ОПК-2, ОПК-3			
Эконометрика			ОПК-2		
Методы оптимальных решений			ОПК-3		
Микроэкономика	ОК-7				
Макроэкономика		ОК-7			
Статистика		ОПК-2			
Бухгалтерский учёт и анализ		ОПК-2			
Менеджмент			ОПК-2, ОПК-3		
Маркетинг			ОПК-3		
Физическая культура и спорт	ОК-7				
Информатика	ОПК-3				
Информационные технологии в экономике				ОПК-3	
Аудит					ОПК-3
Финансовый анализ					ОПК-3
Учет и анализ банкротств					ОПК-3
Финансовая математика			ОПК-2		
Бухгалтерский управленческий учет				ОПК-2	
Комплексный анализ хозяйственной деятельности				ОПК-2	

Экономика труда				ОПК-2	
Бухгалтерское дело				ОПК-2	
Анализ финансовой отчетности					ОПК-2
Оценка бизнеса					ОПК-2
Экономическая информатика		ОПК-2			
Экономические информационные системы		ОПК-2			
Финансовый менеджмент				ОПК-2	
Финансовые вычисления в коммерческих расчетах				ОПК-2	
Теория экономического анализа			ОПК-2		
Лабораторный практикум по статистике			ОПК-2		
Учебная практика (практика по получению первичных профессиональных умений и навыков, в том числе первичных умений и навыков научно-исследовательской деятельности)			ОК-7		
Права человека			ОК-7		
Производственная практика (преддипломная практика)					ОПК-2, ОПК-3
Защита выпускной квалификационной работы, включая подготовку к процедуре защиты и процедуру защиты					ОК-7, ОПК-2, ОПК-3
Подготовка публичной защиты ВКР					ОК-7

Этап дисциплины (модуля) Б1.Б.09 Линейная алгебра в формировании компетенций соответствует:

- для очной формы обучения – 1 и 2 семестру;
- для заочной формы обучения – 1 курсу.

2. Показатели и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования, шкалы оценивания

Показателями оценивания компетенций являются следующие результаты обучения:

Код компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели)
ОК-7	Знать: основные направления развития линейных моделей Уметь: пользоваться учебной литературой и пользоваться информационными технологиями для освоения современных подходов к линейным моделям Владеть: современными навыками к самоорганизации и самообразованию при применении и выборе методов линейной алгебры
ОПК-2	Знать: содержание утверждений и следствий из них, используемых для обоснования выбираемых математических методов решения экономических задач; основные приемы решения математических задач. Уметь: проводить анализ данных с помощью методов линейной алгебры необходимых для расчета экономических и социально-экономических показателей. Владеть: навыками применения современного математического инструментария сбора,

	анализа и обработки данных, необходимых для решения профессиональных задач для решения экономических задач; навыками сбора и обработки необходимых данных для математической постановки и решения экономических задач.
ОПК-3	Знать: математический инструментарий для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей Уметь: выбирать инструментарий математического анализа и моделирования для решения экономических задач. Владеть: навыками выбора математического инструментария для решения экономических задач, навыками обоснования полученных результатов

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины (модуля):

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенции (части компетенций)	Критерии оценивания	Оценочные средства текущего контроля успеваемости	Шкала оценивания
1	Тема 1. Общие сведения о матрицах	ОК-7, ОПК-2	Знать: - определение понятия матрица Уметь: - строить матрицы Владеть: - методом решения матриц	Устный опрос, тесты, решение ситуационных задач	«Зачтено» «Не зачтено»
2	Тема 2. Операции над матрицами	ОК-7, ОПК-2	Знать: - сложение матриц и умножение матрицы на число Уметь: - вести сложение матриц. Владеть: - умножением матриц на число.	Устный опрос, тесты, решение ситуационных задач	«Зачтено» «Не зачтено»
3	Тема 3. Определители квадратных матриц	ОК-7, ОПК-2	Знать: - определение определителя матрицы. Уметь: - вести разложение по строке или столбцу Владеть: - определителем треугольной матрицы.	Устный опрос, тесты, решение ситуационных задач	«Зачтено» «Не зачтено»
4	Тема 4. Обратная матрица.	ОК-7, ОПК-2, ОПК-3	Знать: - понятие обратной матрицы Уметь: - выделять виды матрицы. Владеть: - алгоритмом нахождения обратной матрицы	Устный опрос, тесты, решение ситуационных задач	«Зачтено» «Не зачтено»
5	Тема 5. Метод обратной матрицы. Формулы Крамера.	ОК-7, ОПК-2, ОПК-3	Знать: - определение понятия системы линейных уравнений Уметь: - применять метод Крамера для решения системы Владеть: - методом Крамера для решения системы	Устный опрос, тесты, решение ситуационных задач	«Зачтено» «Не зачтено»
6	Тема 6. Метод Гаусса решения	ОК-7, ОПК-2, ОПК-3	Знать: - системы линейных	Устный опрос, тесты,	«Зачтено» «Не зачтено»

	систем линейных уравнений.		уравнений. Уметь: - применять методы Гаусса. Владеть: - методы Крамера.	решение ситуационных задач	
7	Тема 7. Системы линейных однородных уравнений.	ОК-7, ОПК-2, ОПК-3	Знать: - определение системы линейных однородных уравнений. Уметь: - находить фундаментальной системы решений. Владеть: - фундаментальными системами решения	Устный опрос, тесты, решение ситуационных задач	«Зачтено» «Не зачтено»
8	Тема 8. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.	ОК-7, ОПК-2, ОПК-3	Знать: - основная задача межотраслевого баланса. Уметь: - вести операции над межотраслевым балансом Владеть: - задачами межотраслевого баланса.	Устный опрос, тесты, решение ситуационных задач	«Зачтено» «Не зачтено»
9	Тема 9. Векторы на плоскости и в пространстве.	ОК-7, ОПК-2, ОПК-3	Знать: - определение вектора. Уметь: - вести операции с вектором Владеть: - понятием вектора	Устный опрос, тесты, решение ситуационных задач	«Зачтено» «Не зачтено»
10	Тема 10. Линейные операторы.	ОК-7, ОПК-2, ОПК-3	Знать: - определение линейного оператора. Уметь: - вести расчет линейного оператора. Владеть: - теоремой об образе вектора.	Устный опрос, тесты, решение ситуационных задач	«Зачтено» «Не зачтено»
11	Тема 11. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.	ОК-7, ОПК-2, ОПК-3	Знать: - понятие собственный вектор линейного оператора. Уметь: - формировать связь матриц линейного оператора в различных базисах. Владеть: - уравнением линейного оператора.	Устный опрос, тесты, решение ситуационных задач	«Зачтено» «Не зачтено»
12	Тема 12. Квадратичные формы. Линейная модель обмена.	ОК-7, ОПК-2, ОПК-3	Знать: - понятие квадратичной формы. Уметь: - строить матрицы квадратичной формы. Владеть: - линейной моделью обмена.	Устный опрос, тесты, решение ситуационных задач	«Зачтено» «Не зачтено»
13	Тема 13. Системы	ОК-7, ОПК-2, ОПК-3	Знать: - понятие уравнение линии	Устный опрос, тесты,	«Зачтено» «Не зачтено»

	координат. Уравнение линии на плоскости		на плоскости. Уметь: - рассчитывать различные виды систем координат. Владеть: - системой координат.	решение ситуационных задач	
14	Тема 14. Уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой	ОК-7, ОПК-2, ОПК-3	Знать: - различные виды уравнений прямой на плоскости. Уметь: - применять условие параллельности прямых. Владеть: - условиями перпендикулярности прямых.	Устный опрос, тесты, решение ситуационных задач	«Зачтено» «Не зачтено»
15	Тема 15. Окружность и эллипс. Гипербола и парабола.	ОК-7, ОПК-2, ОПК-3	Знать: - уравнение окружности. Уметь: - вести расчет гиперболы Владеть: - основными свойствами кривых второго порядка.	Устный опрос, тесты, решение ситуационных задач	«Зачтено» «Не зачтено»
16	Тема 16. Полярные координаты. Плоскость и прямая в пространстве.	ОК-7, ОПК-2, ОПК-3	Знать: - понятие радиус-вектора. Уметь: - вести расчет радиус-вектора Владеть: - уравнением плоскости в пространстве.	Устный опрос, тесты, решение ситуационных задач	«Зачтено» «Не зачтено»
ИТОГО			Форма контроля	Оценочные средства промежуточной аттестации	Шкала оценивания
			Зачет	Письменный ответ на билет	«Зачтено» «Не зачтено»
			Экзамен	Письменный ответ на билет	«Отлично», «Хорошо», «Удовлетворительно», «Неудовлетворительно»

Критерии оценивания результатов обучения для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

1. Критерий оценивания устного ответа:

Зачтено – хорошее знание основных терминов и понятий курса, последовательное изложение материала курса, умение формулировать некоторые обобщения по теме вопросов, достаточно полные ответы на вопросы, умение использовать фундаментальные понятия из базовых дисциплин при ответе.

Не зачтено – не выполнены требования, соответствующие оценке «зачтено».

2. Критерии оценивания доклада:

Зачтено – содержание основано на глубоком и всестороннем знании темы, изученной литературы, изложено логично, аргументировано и в полном объеме, основные понятия, выводы и обобщения сформулированы убедительно и доказательно, возможны недостатки в систематизации или в обобщении материала, неточности в выводах, основные категории применяются для изложения материала.

Не зачтено – не выполнены требования, соответствующие оценке «зачтено».

3. Критерии оценивания тестирования:

Оценка «отлично» – 86 % – 100 % правильных ответов.

Оценка «хорошо» – 70 % – 85 % правильных ответов.

Оценка «удовлетворительно» – 51 % – 69 % правильных ответов.

Оценка «неудовлетворительно» – 50 % и менее правильных ответов.

4. Критерии оценивания решения ситуационных задач:

Зачтено – ответ на вопрос задачи дан правильный, объяснение хода её решения подробное, последовательное, грамотное, с теоретическими обоснованиями или решение подробное, но недостаточно логичное, с единичными ошибками в деталях, некоторыми затруднениями в теоретическом обосновании, или ответ на вопрос задачи дан правильный, объяснение хода её решения недостаточно полное, непоследовательное, с ошибками, слабым теоретическим обоснованием.

Не зачтено – не выполнены требования, соответствующие оценке «зачтено».

5. Критерии оценивания ответа на зачете:

Оценка «зачтено» выставляется обучающемуся, если: использует приемы анализа для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей; знает особенности математического инструментария для решения экономических задач;

Оценка «незачтено» выставляется обучающемуся, если: демонстрирует фрагментарные знания основных разделов программы изучаемого курса: его базовых понятий и фундаментальных проблем; слабо выражена способность к самостоятельному аналитическому мышлению, имеются затруднения в изложении материала, отсутствуют необходимые умения и навыки; допущены грубые ошибки и незнание терминологии, отказ отвечать на дополнительные вопросы, знание которых необходимо для получения положительной оценки.

6. Критерии оценивания ответа на экзамене:

Оценка «отлично» выставляется обучающемуся, если он продемонстрировал знание основного теоретического содержания дисциплин учебного плана образовательной программы высшего образования, умение показать уровень сформированности практических профессиональных умений и навыков, способность четко и аргументировано отвечать на дополнительные вопросы.

Оценка «хорошо» выставляется обучающемуся, если он продемонстрировал недостаточно полное знание основного теоретического содержания дисциплин учебного плана образовательной программы высшего образования, проявил неявное умение продемонстрировать уровень сформированности практических профессиональных умений и навыков, давал не всегда четкие и логичные ответы на дополнительные вопросы.

Оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он продемонстрировал неглубокие знания основного теоретического содержания дисциплин учебного плана образовательной программы высшего образования, а также испытывал существенные затруднения при ответе на дополнительные вопросы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он продемонстрировал отсутствие знаний основного теоретического содержания дисциплин учебного плана образовательной программы высшего образования при ответе на вопросы билета.

3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

1 ЭТАП – Текущий контроль освоения дисциплины

3.1. «Вопросы для устного опроса»:

1. Происхождение понятия матрицы.
2. Практическое применение матриц.
3. Определение понятия матрица.
4. Виды матриц (единичная, нулевая, лестничная).
5. Столбец и строка матрицы.
6. Операции над матрицами
7. Сложение матриц.
8. Умножение матрицы на число.
9. Определение определителя матрицы.
10. Основные свойства определителей.
11. Определитель треугольной матрицы.
12. Понятие обратной матрицы.
13. Порядок нахождения обратной матрицы.
14. Виды матрицы.
15. Определение понятия системы линейных уравнений.
16. Метод Крамера для решения системы.
17. Понятия алгебраические дополнения.
18. Системы линейных уравнений.
19. Методы Гаусса.

20. Методы Крамера.
21. Определение системы линейных однородных уравнений.
22. Понятия фундаментальной системы решений.
23. Фундаментальная система решений.
24. Основная задача межотраслевого баланса.
25. Понятие коэффициента прямых затрат.
26. Матрицы полных затрат.
27. Определение вектора.
28. Операции над векторами.
29. Произведение двух векторов и его свойства.
30. Определение линейного оператора.
31. Характеристика линейного оператора.
32. Расчет линейного оператора.
33. Собственный вектор линейного оператора.
34. Связь матриц линейного оператора в различных базисах.
35. Уравнение линейного оператора.
36. Понятие квадратичной формы.
37. Матрицы квадратичной формы.
38. Линейная модель обмена.
39. Уравнение линии на плоскости.
40. Различные виды систем координат.
41. Расстояние между двумя точками.
42. Различные виды уравнений прямой на плоскости.
43. Условие параллельности прямых.
44. Условие перпендикулярности прямых.
45. Уравнение окружности.
46. Определение эллипса.
47. Определение гиперболы.
48. Понятие радиус-вектора.
49. Уравнение плоскости в пространстве.

3.2. «Примерный перечень тем докладов»:

Тема 3. Определители квадратных матриц

1. Определение определителя матрицы. Правила вычисления.
2. Правило треугольников вычисления определителей.
3. Свойства определителей.
4. Теорема Лапласа.
5. Правило Сарруса.

Тема 4. Обратная матрица

1. Определение обратной матрицы. Основное свойство обратной матрицы.
2. Алгоритм нахождения обратной матрицы разного порядка.
3. Определение ранга матрицы. Свойства.

Тема 5. Метод обратной матрицы. Формулы Крамера.

1. Понятие системы линейных уравнений. Виды систем.
2. Метод обратной матрицы решения систем линейных уравнений
3. Метод Крамера для решения системы. Характеристики метода Крамера.

Тема 6. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

1. Особенность метода Гаусса.
2. Алгоритм решения системы линейных уравнений методом Гаусса.
3. Характеристика метода Гаусса.
4. Универсальность метода Гаусса.

Тема 7. Системы линейных однородных уравнений.

1. Определение системы линейных однородных уравнений.
2. Определение понятия фундаментальной системы решений.
3. Связь решений однородной и неоднородной систем линейных уравнений.

Тема 8. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.

1. Биография В.В. Леонтьева и его вклад в развитие математики.
2. Модель межотраслевого баланса.
3. Виды моделей межотраслевой экономики.

Тема 10. Линейные операторы.

1. Собственный вектор линейного оператора.
2. Связь матриц линейного оператора в различных базисах.
3. Уравнение линейного оператора.

Тема 11. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

1. Характеристическое уравнение линейного оператора.
2. Алгоритм нахождения собственных значений векторов линейного оператора.
3. Алгоритм собственных векторов линейного оператора.

Тема 12. Квадратичные формы. Линейная модель обмена.

1. Понятие квадратичной формы.
2. Матрицы квадратичной формы.
3. Линейная модель обмена.
4. Алгоритм составления матрицы квадратичной формы.
5. Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Тема 13. Системы координат. Уравнение линии на плоскости

1. Уравнение линии на плоскости.
2. Различные виды систем координат.

3. Расстояние между двумя точками.
4. Сущность линии на плоскости.
5. Система координат.
6. Уравнение систем.

Тема 14. Уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой.

1. Различные виды уравнений прямой на плоскости.
2. Условие параллельности прямых.
3. Условие перпендикулярности прямых.
4. Уравнение прямой.
5. Расстояние от точки до прямой.

Тема 15. Окружность и эллипс. Гипербола и парабола.

1. Уравнение окружности.
2. Определение эллипса.
3. Определение гиперболы.
4. Определение параболы.

Задания закрытого типа (Тестовые задания)

Номер вопроса и проверка сформированной компетенции

№ вопроса	Код компетенции	№ вопроса	Код компетенции
1	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	17	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
2	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	18	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
3	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	19	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
4	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	20	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
5	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	21	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
6	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	22	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
7	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	23	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
8	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	24	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
9	ОК-7	25	ОК-7

	ОПК-2 ОПК-3		ОПК-2 ОПК-3
10	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	26	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
11	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	27	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
12	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	28	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
13	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	29	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
14	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	30	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
15	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	31	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
16	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	32	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3

Ключ ответов

Тема 1. № вопроса	Верный ответ	Тема 2. № вопроса	Верный ответ	Тема 3. № вопроса	Верный ответ	Тема 4. № вопроса	Верный ответ
1	1–Б; 2–А; 3–Г; 4–В	3	1	5	1–А; 2–В; 3–Б; 4–Г	7	4
2	2,3	4	2	6	3	8	5,3,4,1,2

Ключ ответов

Тема 5. № вопроса	Верный ответ	Тема 6. № вопроса	Верный ответ	Тема 7. № вопроса	Верный ответ	Тема 8. № вопроса	Верный ответ
9	4	11	2,1,4,3,5	13	2	15	2
10	4	12	4	14	4	16	1

Ключ ответов

Тема 9. № вопроса	Верный ответ	Тема 10. № вопроса	Верный ответ	Тема 11. № вопроса	Верный ответ	Тема 12. № вопроса	Верный ответ
17	2	19	1,2	21	1,2	23	1
18	3	20	2	22	3	24	1,4

Ключ ответов

Тема 13. № вопроса	Верный ответ	Тема 14. № вопроса	Верный ответ	Тема 15. № вопроса	Верный ответ	Тема 16. № вопроса	Верный ответ
25	1,3	27	1–В; 2–А; 3–Г; 4–Б	29	1–В; 2–А; 3– Б; 4– Г	31	2,3
26	1–Б; 2–А	28	1	30	1–Б; 2–В; 3–Г; 4–А	32	1–Б; 2–А; 3–Г; 4–В

Примерные тестовые задания для проведения текущего контроля по темам дисциплины:

Тема 1. Общие сведения о матрицах

Задание № 1

Установите соответствие между видами матриц и их понятиями.

Столбец 1		Столбец 2	
1	Равные	А	Квадратная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, а все остальные элементы равны нулю
2	Единичная	Б	Если они имеют одинаковые размеры и для каждой пары индексов выполняется равенство $a_{ij}= b_{ij}$.
3	Транспонированная	В	Элементы такой матрицы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны.
4	Симметричная	Г	Матрица, получающаяся из матрицы А заменой строк столбцами с сохранением их порядка.

Задание № 2

С каким геометрическим объектом можно сопоставить матрицу?

1. Круг;
2. Квадрат;
3. Прямоугольник;
4. Параллелепипед.

Тема 2. Операции над матрицами

Задание № 3

Произведение матриц $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ равно:

1. $\begin{pmatrix} 18 & 15 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -11 & -10 & -29 \\ -11 & -10 & -29 \\ -5 & -7 & -14 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 19 & 15 \\ 24 & 18 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 10 & 10 & 29 \\ 11 & 9 & 29 \\ 5 & 7 & 13 \end{pmatrix}$

Задание № 4

Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$. Сумма $2A + 3B^T$равна

1. $\begin{pmatrix} 8 & 14 & 13 \\ 6 & 11 & 14 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 14 & 23 & 21 \\ 10 & 19 & 23 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 20 & 32 & 29 \\ 14 & 27 & 32 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 23 & 19 \\ 21 & 23 \end{pmatrix}$

Тема 3. Определители квадратных матриц

Задание № 5

Установить соответствие между матрицами и их определителями.

Столбец 1		Столбец 2	
1	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ -6 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	А	25
2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -10 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$	Б	-15
3	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	В	9

4	$\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$	Г	25

Задание № 6

Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Определитель матрицы AB^T равен:

1. 0;
2. 15;
3. -91;
4. -20.

Тема 4. Обратная матрица

Задание № 7

Обратной к матрице $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$ является матрица:

1. $\begin{pmatrix} -8 & -1 \\ -23 & -3 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 1 \\ \frac{1}{23} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$;
4. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -23 & 8 \end{pmatrix}$.

Задание № 8

Запишите верную последовательность нахождения обратной матрицы:
1) записать обратную матрицу;
2) сделать проверку;
3) сделать вывод о существовании обратной матрицы;
4) найти алгебраические дополнения к элементам матрицы;
5) найти определитель матрицы.

Тема 5. Метод обратной матрицы. Формулы Крамера

Задание № 9

Решить система линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \\ -x_1 - x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6 \end{cases}.$$

1. $(3,-7,1)$;
2. $(-8,4,1)$;
3. $(0,0,0)$;
4. $(2,3,1)$.

Задание № 10

Матричное уравнение $AX = B$ с невырожденной квадратной матрицей A имеет решение:

1 $X = AB$;
2 $X = BA^{-1}$;
3. $X = BA$;
4. $X = A^{-1}B$.

Тема 6. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Задание № 11

Составьте правильную последовательность действий при решении системы методом Гаусса.

1. С помощью элементарных преобразований привести записанную матрицу к ступенчатому виду;
2. Записать расширенную матрицу исходной системы;
3. Начиная с последнего уравнения, найти все переменные;
4. По полученной ступенчатой матрице записать систему;
5. Сделать проверку.

Задание № 12

Система Ах=В неопределенна, когда

1. имеет единственное нулевое решение;
2. не имеет решений;
3. имеет единственное ненулевое решение;
4. имеет бесконечно решений.

Тема 7. Системы линейных однородных уравнений

Задание № 13

Система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ имеет:

1. одно ненулевое решение;
2. бесконечно много решений;
3. нет решений;
4. одно нулевое решение.

Задание № 14

Система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_3 - 2x_2 - 4x_1 = 0 \end{cases}$ имеет

1. нет решений;
2. бесконечно много решений;
3. одно ненулевое решение;
4. одно нулевое решение.

Тема 8. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Задание № 15

В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл. ден. ед.

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2		
Производство	1	15	20	-	100
	2	40	30	-	150

Найти конечный продукт каждой отрасли.

1. 150 и 120;
2. 65 и 80;
3. 120 и 180;
4. 115 и 140.

Задание № 16

В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл. ден. ед.

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2		
Производство	1	30	20	-	120
	2	40	10	-	110

Найти чистый продукт каждой отрасли.

1. 50 и 80;
2. 100 и 60;

3. 120 и 100;
4. 30 и 40.

Тема 9. Векторы на плоскости и в пространстве

Задание № 17

Определить вид зависимости для системы двух векторов: A_1 (-4, 2, 8); A_2 (14, -7, -28).

1. линейно зависима;
2. линейно независима;
3. линейно ортогональна;
4. линейно коллинеарна.

Задание № 18

Из векторов $a = (2;7;5)$, $b = (7,-2,5)$ и $c = (5,0,-7)$, ортогональными являются…

1. a и b;
2. a и c;
3. b и c;
4. a и b, b и c.

Тема 10. Линейные операторы

Задание № 19

Оператор называется линейным, если он обладает свойствами:

1. аддитивности;
2. однородности;
3. ассоциативности;
4. симметричности.

Задание № 20

Пусть в пространстве R^3 задан линейный оператор A в базисе e_1, e_2, e_3 матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. Найти образ y=f(x) вектора $x= 4e_1–3e_2+e_3$.

1. $y= 2e_1–3e_2–18e_3$;
2. $y= 10e_1–13e_2–18e_3$;
3. $y= 3e_1–13e_2–18e_3$;
4. $y= –5e_1+3e_2–10e_3$.

Тема 11. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Задание № 21

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора А, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.

1. -5;
2. 7;
3. 2;
4. 0.

Задание № 22

Собственный вектор под действием линейного оператора А переходит в вектор…

1. с нулевыми координатами;
2. ортогональный самому себе;
3. коллинеарный самому себе;
4. компланарный самому себе.

Тема 12. Квадратичные формы. Линейная модель обмена

Задание № 23

Дана квадратичная форма $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 16x_1x_3$. Найти матрицу данной квадратичной формы.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & 5 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -16 \\ 4 & 5 & 0 \\ -16 & 0 & -8 \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 2 & 2{,}5 & 0 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$;
4. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & 5 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$.

Задание № 24

Дана квадратичная форма $L(x_1, x_2) = 13x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2$. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму.

1. является положительно определенной;
2. является отрицательно определенной;
3. не является знакоопределенной;

4. является знакоопределенной.

Тема 13. Системы координат. Уравнение линии на плоскости

Задание № 25

Какие из уравнений задают линию?

1. $x^2 + y^2 = 4y$;
2. $x^2 + y^2 = 0$;
3. $x^2 = 2y$;
4. $x^2 + y^2 = -6$.

Задание № 26

Установите соответствие между условиями параллельности и перпендикулярности векторов $\vec{a} = (a_x, a_y)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y)$.

Столбец 1		Столбец 2	
1	Условие параллельности	А	$a_x b_x + a_y b_y = 0$
2	Условие перпендикулярности	Б	$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y}$

Тема 14. Уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой

Задание № 27

Выберите верную формулу для нахождения следующих величин

Столбец 1		Столбец 2	
1	Угол между векторами	А	$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
2	Расстояние между точками	Б	$x = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y = \frac{y_A + y_B}{2}.$
3	Деление отрезка в данном отношении	В	$\frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$
4	Координаты середины отрезка	Г	$x = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}$

Задание № 28

Дана точка M(-1,2). Найти уравнение прямой проходящей через эту точку перпендикулярно прямой $2x - y + 3 = 0$.

1. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$;

2. $y = x + 3$;

3. $y = -x + \frac{3}{2}$;

4. $y = -x - \frac{3}{2}$.

Тема 15. Окружность и эллипс. Гипербола и парабола

Задание № 29

Установите соответствие между линией и ее определением.

Столбец 1		Столбец 2	
1	Эллипс	А	Геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек (фокусов) той же плоскости есть постоянная величина
2	Гипербола	Б	Геометрическое место точек на плоскости, равноудалённых от данной прямой (называемой директрисой) и данной точки (называемой фокусом)
3	Парабола	В	Геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от каждой точки до двух точек F_1 и F_2 равна постоянной величине
4	Окружность	Г	Это множество всех точек на плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки

Задание № 30

Установите соответствие между линией и ее уравнением.

Столбец 1		Столбец 2	
1	Эллипс	А	$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 25$
2	Гипербола	Б	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$
3	Парабола	В	$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{49} = 1$
4	Окружность	Г	$x^2 = 4y$

Тема 16. Полярные координаты. Плоскость и прямая в пространстве

Задание № 31

Даны точки $M_1(3;1;-8)$ $M_2(2;4;-3)$ $M_3(6;0;7)$ $M_4(-3;-1;0)$.

Определить какие из точек лежат на плоскости $2x - y + z + 3 = 0$.

1. $M_3(6;0;7)$;
2. $M_1(3;1;-8)$;
3. $M_2(2;4;-3)$;
4. $M_4(-3;-1;0)$.

Задание № 32

Установите соответствие между видами уравнений плоскости и их аналитическим выражением.

Столбец 1		Столбец 2	
1	Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору n(A,B,C)	А	Ax+By+Cz+D=0
2	Общее уравнение плоскости	Б	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
3	Уравнение плоскости в отрезках	В	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$
4	Уравнение плоскости, проходящей через три точки	Г	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Задания открытого типа (типовые задания, ситуационные задачи)

Номер вопроса и проверка сформированной компетенции

№ вопроса	Код компетенции	№ вопроса	Код компетенции
1	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	21	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
2	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	22	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
3	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	23	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
4	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	24	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
5	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	25	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
6	ОК-7	26	ОК-7

	ОПК-2 ОПК-3		ОПК-2 ОПК-3
7	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	27	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
8	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	28	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
9	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	29	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
10	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	30	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
11	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	31	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
12	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	32	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
13	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	33	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
14	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	34	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
15	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	35	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
16	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	36	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
17	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	37	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
18	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	38	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
19	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	39	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
20	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	40	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3

Ключ ответов к заданиям открытого типа

№ вопроса	Верный ответ
1	1) равные; 2) квадратные; 3) единичные; 4) диагональные.

<table>
<tr><td>2</td><td>Например, матрица $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ является матрицей порядка 3×4. Элемент $a_{12}=4$.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Первые упоминания о матрицах дошли до нас ещё из Древнего Китая. В те давние времена матрицы называли «волшебными квадратами». Выдающийся математик Габриэль Крамер опубликовал свое, по сей день известное и используемое «Правило Крамера». Приблизительно в этот же период появился не менее популярный «Метод Гаусса». Ну а непосредственно введение самого термина «матрица» - заслуга Джеймса Сильвестра. Термин появился в 1850 году.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$$A+B=\begin{pmatrix} 20 & 6 & 3 \\ 5 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=$$ $$=\begin{pmatrix} 2\cdot2+0\cdot1+1\cdot(-3) & 2\cdot1+0\cdot5+1\cdot2 \\ -1\cdot2+3\cdot1+2\cdot(-3) & -1\cdot1+3\cdot5+2\cdot2 \\ 0\cdot2+1\cdot1+4\cdot(-3) & 0\cdot1+1\cdot5+4\cdot2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 18 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}.$$</td></tr>
<tr><td>6</td><td><u>1способ</u>. Матрица затрат сырья $S=C\cdot A=\begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix}.$
Общая стоимость сырья $Q=S\cdot B=(CA)B=70900.$
<u>2 способ</u>. Найдем матрицу стоимостей затрат сырья на единицу продукции, т.е. матрицу $R=A\cdot B=\begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix}$, а затем стоимость сырья $Q=CR=C\cdot(AB)=70900.$
Замечание. На этом примере мы убедились в выполнении ассоциативного закона произведения матриц $(CA)B=C(AB)$.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Обозначим через А матрицу, данную нам в условии, а через В - матрицу, характеризующую стоимость доставки единицы продукции в магазины, т.е., $$A=\begin{pmatrix} 20 & 35 & 10 \\ 15 & 27 & 8 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 50 & 70 & 130 \end{pmatrix}.$$ Тогда матрица затрат на перевозки будет иметь вид: $AB^T=\begin{pmatrix} 20 & 35 & 10 \\ 15 & 27 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 130 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20\cdot50+35\cdot70+10\cdot130 \\ 15\cdot50+27\cdot70+8\cdot130 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4750 \\ 3680 \end{pmatrix}$ Итак, первый завод ежедневно тратит на перевозки 4750 ден. ед., второй - 3680 ден.ед.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>В соответствие с формулой расчета определителя второго порядка получим: $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot2-5\cdot(-3)=2+15=17.$</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Вычислим определитель по правилу треугольника. Получим:</td></tr>
</table>

	$\Delta=\begin{vmatrix}5&-1&2\\2&3&-4\\1&2&3\end{vmatrix}=5\cdot3\cdot3+(-1)\cdot(-4)\cdot1+2\cdot2\cdot2-$ $-1\cdot3\cdot2-2\cdot(-1)\cdot3-2\cdot(-4)\cdot5=45+4+8-6+6+40=97.$
10	$\Delta=\begin{vmatrix}2&3&1\\0&1&5\\4&2&-1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1&5\\2&-1\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}0&5\\4&-1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}0&1\\4&2\end{vmatrix}=$ $=2\cdot(-1-10)-3\cdot(0-20)+1(0-4)=34.$ Разложение было выполнено по элементам 1-ой строки.
11	Воспользуемся формулой Лапласа, выбрав для разложения определителя первую строку (i = 1): $\Delta=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}+a_{14}\cdot A_{14}.$ Таким образом, $\Delta=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&5\\2&1&1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&5\\1&1&1\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&5\\1&2&1\end{vmatrix}+$ $4\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&5\\2&1&1\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&5\\1&1&1\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&5\\1&2&1\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&2&1\end{vmatrix}.$ Вычисляя каждый из определителей третьего порядка по правилу треугольников, получим: Δ = (3 + 2 + 10 – 6– 5 –2) – 2·(3 + 5 + 1 – 3 –1 – 5) + 3·(2 + 2 + 5 – 2 –10 – 1) – 4·(2 + 2 + 3 – 2 – 6 – 1) = 2 – 12 + 8 = – 2.
12	Определитель матрицы А равен: $\Delta=\begin{vmatrix}1&3\\-5&2\end{vmatrix}=1\cdot2-3\cdot(-5)=17$ Так, как Δ $\neq 0$, то матрица А невырожденная и для нее существует обратная. Найдем обратную матрицу: $A^{-1}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}2&-3\\5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{17}&-\frac{3}{17}\\\frac{5}{17}&\frac{1}{17}\end{pmatrix}$ Проверка: $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\-5&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{17}&-\frac{3}{17}\\\frac{5}{17}&\frac{1}{17}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1\cdot2+3\cdot15}{17}&\frac{1\cdot(-3)+3\cdot1}{17}\\\frac{(-5)\cdot2+2\cdot5}{17}&\frac{(-5)\cdot(-3)+2\cdot1}{17}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{17}&-\frac{3}{17}\\\frac{5}{17}&\frac{1}{17}\end{pmatrix}$
13	Определитель матрицы A вычислен ранее:

	$$\Delta=\begin{vmatrix}2&3&1\\0&1&5\\4&2&-1\end{vmatrix}=34\cdot$$ Так, как $\Delta\neq 0$, то матрица A невырожденная и для нее существует обратная. Найдем алгебраические дополнения каждого элемента матрицы A: $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&5\\2&-1\end{vmatrix}=-1-10=-11;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&5\\4&-1\end{vmatrix}=-(0-20)=20;$ $A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&1\\4&2\end{vmatrix}=0-4=-4;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3&1\\2&-1\end{vmatrix}=-(-3-2)=5;$ $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&1\\4&-1\end{vmatrix}=-2-4=-6;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&3\\4&2\end{vmatrix}=-(4-12)=8;$ $A_{31}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3&1\\1&5\end{vmatrix}=15-1=14;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&1\\0&5\end{vmatrix}=-(10-0)=-10;$ $A_{33}=(-1)^{3-3}\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}=2-0=2.$ Следовательно: $A^{-1}=\dfrac{1}{34}\begin{pmatrix}-11&5&14\\20&-6&-10\\-4&8&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{11}{34}&\frac{5}{34}&\frac{14}{34}\\\frac{20}{34}&\frac{-6}{34}&-\frac{10}{34}\\-\frac{4}{34}&\frac{8}{34}&\frac{2}{34}\end{pmatrix}.$ Проверка: $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&1\\0&1&5\\4&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{11}{34}&\frac{5}{34}&\frac{14}{34}\\\frac{20}{34}&-\frac{6}{34}&-\frac{10}{34}\\-\frac{4}{34}&\frac{8}{34}&\frac{2}{34}\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}2\cdot\left(-\frac{11}{34}\right)+3\cdot\frac{20}{34}+1\cdot\left(-\frac{4}{34}\right)&2\cdot\frac{5}{34}+3\cdot\left(-\frac{6}{34}\right)+1\cdot\frac{8}{34}&2\cdot\frac{14}{34}+3\cdot\left(-\frac{10}{34}\right)+1\cdot\frac{2}{34}\\0\cdot\left(-\frac{11}{34}\right)+1\cdot\frac{20}{34}+5\cdot\left(-\frac{4}{34}\right)&0\cdot\frac{5}{34}+1\cdot\left(-\frac{6}{34}\right)+5\cdot\frac{8}{34}&0\cdot\frac{14}{34}+1\cdot\left(-\frac{10}{34}\right)+5\cdot\frac{2}{34}\\4\cdot\left(-\frac{11}{34}\right)+2\cdot\frac{20}{34}-1\cdot\left(-\frac{4}{34}\right)&4\cdot\frac{5}{34}+2\cdot\left(-\frac{6}{34}\right)-1\cdot\frac{8}{34}&4\cdot\frac{14}{34}+2\cdot\left(-\frac{10}{34}\right)-1\cdot\frac{2}{34}\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$ Ответ: $A^{-1}=\dfrac{1}{34}\cdot\begin{pmatrix}-11&5&14\\20&-6&-10\\-4&8&2\end{pmatrix}.$
14	Левый минор четвертого порядка данной матрицы равен

<table>
<tr><td></td><td>

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

Следовательно, ранг матрицы равен 4
</td></tr>
<tr><td>15</td><td>

Запишем систему в матричном виде: $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$,

где $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ – основная матрица системы, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных и $\bar{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 19 \\ 1 \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов. Так как главный определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 97 \neq 0$, то основная матрица системы A имеет обратную матрицу A^{-1}. Для нахождения обратной матрицы A^{-1}, вычислим алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 17, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 13, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 24,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -11, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 17.$$

Из полученных чисел составим матрицу (причем алгебраические дополнения к строкам матрицы A запишем в соответствующие столбцы) и разделим ее на определитель Δ. Таким образом, мы нашли обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{97} \cdot \begin{pmatrix} 17 & 7 & -2 \\ -10 & 13 & 24 \\ 1 & -11 & 17 \end{pmatrix}.$$

Решение системы находим следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{97} \cdot \begin{pmatrix} 17 & 7 & -2 \\ -10 & 13 & 24 \\ 1 & -11 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 19 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{97} \cdot \begin{pmatrix} -34+133-2 \\ 20+247+24 \\ -2-209+17 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{97} \cdot \begin{pmatrix} 97 \\ 291 \\ -194 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x = 1$, $y = 3$, $z = -2$.
</td></tr>
</table>

16	Вычислим определители Δ, Δ_1 , Δ_2 , Δ_3. $\Delta=\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&2&-1\\3&-3&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&-1\\-3&1\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}1&-1\\3&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1&2\\3&-3\end{vmatrix}=2(2-3)+(1+3)+(-3-6)=$ $=-2+4-9=-7,$ $\Delta_1=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&2&-1.\\2&-3&1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}2&-1\\-3&1\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}2&-1\\2&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2&2\\2&-3\end{vmatrix}=(2-3)+(2+2)+(-6-4)=$ $=-1+4-10=-7,$ $\Delta_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\3&2&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&-1\\2&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&-1\\3&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}=2(2+2)-(1+3)+(2-6)=8-4-4=0,$ $\Delta_3=\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&2&2\\3&-3&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&2\\-3&2\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1&2\\3&-3\end{vmatrix}=2(4+6)+(2-6)+(-3-6)=20-4-9=7.$ Тогда $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-7}{-7}=1;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{0}{7}=0;\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{7}{-7}=-1\cdot$ Ответ: x_1=1, x_2=0, x_3= -1.
17	Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 количество сырья, которое следует переработать по каждой технологии, чтобы выполнить плановое задание. Получим систему трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=94,\\2x_1+x_2+7x_3+4x_4=574,\\6x_1+12x_2+2x_3+3x_4=328.\end{cases}$ Решаем ее методом Гаусса: $\begin{pmatrix}1&1&1&1&94\\2&1&7&4&574\\6&12&2&3&328\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&94\\0&-1&5&2&386\\0&6&-4&-3&-236\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&94\\0&-1&5&2&386\\0&0&26&9&2080\end{pmatrix}$ Имеем: r (A) = r (A) = 3, следовательно, число главных неизвестных равно трем, одно неизвестное x_4 - свободное. Исходная система равносильна следующей системе: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=94-x_4,\\-x_2+5x_3=386-2x_4,\\26x_3=2080-9x_4.\end{cases}$ С математической точки зрения система имеет бесчисленное множество решений, т. е. неопределенна. С учетом реального экономического содержания неизвестные величины не могут быть отрицательными. Получаем вектор (0, 14, 80, 0) является решением данной системы.
18	Запишем матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду. $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&-3&4&2\\3&-2&5&3\\1&-4&3&1\end{pmatrix}$

<table>
<tr><td></td><td>

Преобразуем ее к виду: $\tilde{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -5 & 2 & 0\\ 0 & -5 & 2 & 0\\ 0 & -5 & 2 & 0\end{pmatrix}$. Очевидно, что r(A)=2.

Пусть x_1, x_2- базисные неизвестные, x_3, x_4- свободные неизвестные. Заменим исходную систему системой из первых двух уравнений, коэффициенты которых входят в базисный минор, и перенесем базисные неизвестные в правые части уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 \\ 2x_1 - 3x_2 = -4x_3 - 2x_4 \end{cases}.$$

Пусть $x_3 = 1, x_4 = 0$. Тогда $x_1 = -1,4; x_2 = 0,4.$ Если $x_3 = 0, x_4 = 1,$ то $x_1 = -1, x_2 = 0.$

Получена фундаментальная система решений: $X_1 = \begin{pmatrix}-1,4\\ 0,4\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

Теперь общее решение системы можно записать в виде: $X = C_1X_1 + C_2X_2$, где C_1 и C_2 – любые произвольные числа.

</td></tr>
<tr><td>19</td><td>

Конечный продукт определяется по формуле: $Y = (E - A)\times X$,

где $E = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Матрица А – это матрица коэффициентов прямых затрат вида

$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, где $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$.

Имеем, $a_{11} = \dfrac{x_{11}}{x_1} = \dfrac{7}{100} = 0{,}07$; $a_{12} = \dfrac{x_{12}}{x_2} = \dfrac{21}{150} = 0{,}14$;

$a_{21} = \dfrac{x_{21}}{x_1} = \dfrac{12}{100} = 0{,}12$; $a_{22} = \dfrac{x_{22}}{x_2} = \dfrac{15}{150} = 0{,}1$.

Получили, $A = \begin{pmatrix}0{,}07 & 0{,}14\\ 0{,}12 & 0{,}1\end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов прямых затрат.

Тогда $E - A = \begin{pmatrix}0{,}93 & -0{,}14\\ -0{,}12 & 0{,}9\end{pmatrix}$.

С помощью Excel найдем $Y = (E - A)\times X = \begin{pmatrix}72\\ 123\end{pmatrix}$ - конечный продукт отраслей.

Найдем чистую продукцию отраслей, используя формулу

$b_i = X_i - \sum\limits_j x_{ij}$, где $j = 1,2,...,n.$

Имеем $b_1 = 100 - 7 - 12 = 81$ - чистая продукция энергетики;

</td></tr>
</table>

$b_2 = 150 - 21 - 15 = 64$ - чистая продукция машиностроения.

Для нахождения валового продукта, соответствующего новому конечному продукту вида $Y' = \begin{pmatrix} 100{,}8 \\ 98{,}4 \end{pmatrix}$, где $y_1' = 72 + 72 \cdot 0{,}4 = 100{,}8; y_2' = 123 - 123 \cdot 0{,}2 = 98{,}4.$

Найдем матрицу полных затрат: $S = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}1 & 0{,}17 \\ 0{,}15 & 1{,}13 \end{pmatrix}$

Напомним, что обратная матрица для матрицы $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ вычисляется по формуле: $B^{-1} = \dfrac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Новый валовой продукт $X = (E - A)^{-1} Y = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1{,}1 & 0{,}17 \\ 0{,}15 & 1{,}13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100{,}8 \\ 98{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 127{,}6 \\ 126{,}3 \end{pmatrix}$.

Получили, что валовой продукт энергетики должен составлять 127,6 усл.ед., а машиностроения – 126,3 усл.ед.

20

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}15 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}25 \end{pmatrix}$$

Сумма элементов каждого столбца меньше единицы.
Следовательно, матрица А продуктивна.
Найдём обратную матрицу (Е-А)$^{-1}$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}15 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}25 \end{pmatrix},$$

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 & -0{,}4 \\ -0{,}5 & 0{,}7 & -0{,}15 \\ -0{,}3 & -0{,}2 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$

$$\Delta(E - A) = 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}75 + (-0{,}3) \cdot (-0{,}15) \cdot (-0{,}3) + (-0{,}5) \cdot (-0{,}2) \cdot (-0{,}4)$$
$$- (-0{,}4) \cdot 0{,}7 \cdot (-0{,}3) - (-0{,}3) \cdot (-0{,}5) \cdot 0{,}75 - (-0{,}15) \cdot (-0{,}2) \cdot 0{,}9 = 0{,}4725 -$$
$$- 0{,}0135 - 0{,}04 - 0{,}084 - 0{,}1125 - 0{,}027 = 0{,}1955 \approx 0{,}2$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}15 \\ -0{,}2 & 0{,}75 \end{vmatrix} = 0{,}075; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -0{,}3 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & 0{,}75 \end{vmatrix} = 0{,}305; \quad A_{31} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -0{,}3 & -0{,}4 \\ 0{,}7 & -0{,}15 \end{vmatrix} = 0{,}73;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -0{,}5 & -0{,}15 \\ -0{,}3 & 0{,}75 \end{vmatrix} = 0{,}42; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0{,}9 & -0{,}4 \\ -0{,}3 & 0{,}75 \end{vmatrix} = 0{,}555; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0{,}9 & -04 \\ -0{,}5 & -0{,}15 \end{vmatrix} = 0{,}335;$$

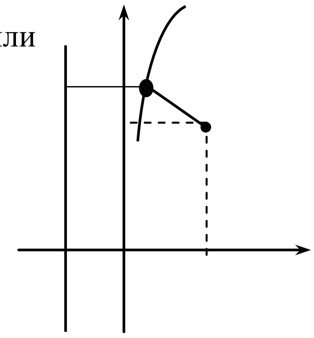
$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -0{,}5 & 0{,}7 \\ -0{,}3 & -0{,}2 \end{vmatrix} = 0{,}31; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & -0{,}2 \end{vmatrix} = 0{,}27; \quad A_{33} = (-1)^{3-3} \begin{vmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}5 & 0{,}7 \end{vmatrix} = 0{,}48.$$

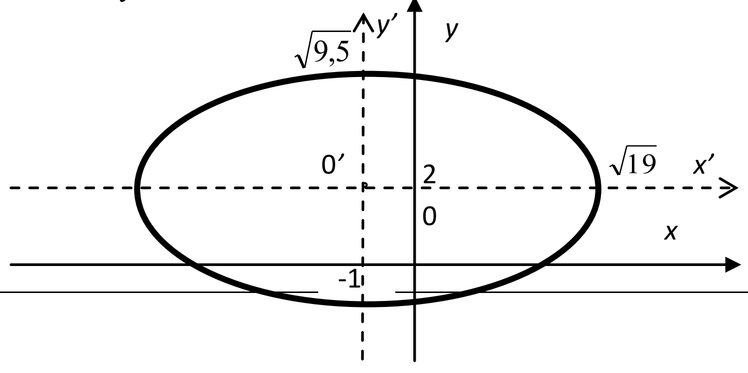
$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12} A_{22} \ldots A_{n2} \\ \ldots \\ A_{1n} A_{2n} \ldots A_{nn} \end{pmatrix} \quad (\mathrm{E - A})^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}53 & 1{,}56 & 1{,}66 \\ 2{,}15 & 2{,}84 & 1{,}71 \\ 1{,}59 & 1{,}38 & 2{,}46 \end{pmatrix}$$

Вектор X = (E-A)$^{-1}$Y= $\begin{pmatrix} 2{,}53 & 1{,}56 & 1{,}66 \\ 2{,}15 & 2{,}84 & 1{,}71 \\ 1{,}59 & 1{,}38 & 2{,}46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81{,}46 \\ 103{,}96 \\ 80{,}31 \end{pmatrix}$

	Итак, конечное потребление Y = (10; 20; 15) будет обеспечено при валовых выпусках 3-х отраслей X = (81,46; 103,96; 80,31). Полученный результат характеризует низкий технологический уровень отраслей, поскольку очень большое внутриотраслевое потребление.
21	$\vec{X}\cdot\vec{Y}=7\cdot 1+(-3)\cdot 9+5\cdot 4=0,$ т.е. $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ ортогональны.
22	Составим линейную комбинацию $\lambda\vec{A}+\beta\vec{B}=\vec{0}$. Подставим координаты и выполним действия над векторами: $\lambda(2,4)+\beta(5,1)=(0,0)\Rightarrow(2\lambda,4\lambda)+(5\beta,\beta)=(0,0)\Rightarrow(2\lambda+5\beta,4\lambda+\beta)=(0,0)$. В равных векторах должны быть равны соответствующие координаты: $\begin{cases}2\lambda+5\beta=0,\\4\lambda+\beta=0.\end{cases}$ Решив эту систему уравнений, получаем: $\lambda=0,\ \beta=0,$ а это значит, что $\vec{A}$ и $\vec{B}$ линейно независимы.
23	Составим линейную комбинацию и приравняем ее к $\vec{0}$: $\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}+\gamma\vec{C}=\vec{0};\quad \alpha(2,4)+\beta(5,1)+\gamma(2,1)=(0,0).$ Выполнив действия над векторами и приравняв координаты равных векторов, получим $\begin{cases}2\alpha+5\beta+2\gamma=0,\\4\alpha+\beta+8\gamma=0.\end{cases}$ Решим систему уравнений: $\alpha=\dfrac{\beta}{2},\gamma=-3\beta$. В этом решении число β играет роль параметра; задавая его произвольно, будем получать значения α и γ, которые вместе с β дают то или иное решение системы. Так, при $\beta\neq 0$ получим $\alpha\neq 0$ и $\gamma\neq 0$, из чего следует, что векторы $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ дают нулевую линейную комбинацию при ненулевых коэффициентах, т.е. они линейно зависимы.
24	Покажем, что равенство $\lambda_1\vec{a_1}+\lambda_2\vec{a_2}+\lambda_3\vec{a_3}=\vec{0}$ возможно только при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$: $\lambda_1(2,0,0)+\lambda_2(0,-1,1)+\lambda_3(0,1,4)=(0,0,0);$ $(2\lambda_1,-\lambda_2+\lambda_3,\lambda_2+4\lambda_3)=(0,0,0),$ или $\begin{cases}2\lambda_1=0,\\-\lambda_2+\lambda_3=0,\\\lambda_2+4\lambda_3=0.\end{cases}$ Решив систему, получим $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$. Так как все $\lambda_i=0$ (i=1,2,3), то $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$ - линейно независимы. Они могут составить базис в R^3. Очевидно, любой новый набор из векторов $\vec{a_1}=(C_1,0,0),$ $\vec{a_2}=(0,C_2,0),$ $\vec{a_3}=(0,0,C_3)$ может тоже быть взятым в качестве базиса в R^3. Итак, базис может быть выбран неединственным образом.

25	$x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \; Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}$ $Ax = A(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1Ae_1 + \ldots + x_nAe_n = (e_1 \ldots e_n) \cdot x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \ldots + (e_1 \ldots e_n) \cdot x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \ldots \\ a_{nn} \end{pmatrix} =$ $(e_1 \ldots e_n) \begin{pmatrix} x_1a_{11} + \ldots + x_na_{1n} \\ \ldots \\ x_1a_{n1} + \ldots + x_na_{nn} \end{pmatrix} = (e_1 \ldots e_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = Y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n = (e_1 \ldots e_n) \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}$ $AX = Y$ $\boxed{Ax = e \cdot Ax,}$ где $e = (e_1 \ldots e_n)$
26	Находим собственный вектор x,отвечающий собственному значению $\lambda = 1$, решив уравнение $(A - E)x = 0$ или $$\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & -0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & -0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ методом Гаусса. Найдем $\mathbf{x} = (c; 2c; c)$. Полученный результат означает, что сбалансированность торговли трех стран достигается при соотношении их национальных доходов $1:2:1$.
27	Матрица данной квадратичной имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$
28	Коэффициенты матрицы $a_{11} = 17$, $a_{12} = 6$, $a_{22} = 8$. $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (17 - \lambda)(8 - \lambda) - 36 = 0;$ $136 - 8\lambda - 17\lambda + \lambda^2 - 36 = 0; \quad \lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0.$ Корни уравнения, являющиеся характеристическими числами равны $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 20$.
29	Так как E – середина отрезка AB, то по формуле (4) имеем: $x_E = \frac{3-1}{2} = 1; \quad y_E = \frac{3+1}{2} = 2.$ Длину медианы CE найдем по формуле: $\lvert CE\rvert = \sqrt{(0-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}.$
30	Если M(x,y) – произвольная точка искомого геометрического места, то всегда $\lvert AM\rvert = R$ или $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R,$ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ – искомое уравнение.

31	Пусть M(x,y) – произвольная точка искомой линии. Расстояние от точки M до прямой $x = -2$ есть длина перпендикуляра MN, опущенного из M на прямую. Определим координаты точки N. Очевидно, что абсцисса точки N равна –2, а ордината точки N равна ординате точки M, т.е. N(–2,y). По условию задачи $\lvert MN\rvert=\lvert MF\rvert$. Следовательно, для любой точки M(x,y), принадлежащей искомой линии, справедливо равенство: $\sqrt{(x+2)^2+(y-y)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$ или $(x+2)^2=(x-2)^2+(y-3)^2$.  Упростим полученное уравнение: $x^2+4x+4=x^2-4x+4+(y-3)^2$ или $8x=(y-3)^2$. Это и есть искомое уравнение.
32	Найдем угловой коэффициент прямой $2x - 4y + 3 = 0$: $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4},\quad k=\frac{1}{2}$. Для искомой прямой угловой коэффициент будет таким же, так как прямые параллельны. Подставим данные в уравнение (6): $y-7=\frac{1}{2}(x-2)$.
33	1. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, имеет вид $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Чтобы найти уравнение стороны AB, подставим координаты точек A и B в уравнение прямой: $\frac{y-3}{12-3}=\frac{x-(-2)}{1-(-2)};\quad \frac{y-3}{9}=\frac{x+2}{3}$; $y - 3 = 3x + 6$; $y = 3x + 9$ (AB). 2. Высота CD перпендикулярна стороне AB, а потому их угловые коэффициенты k_{CD} и k_{AB} удовлетворяют условию $k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}$. Из уравнения прямой AB следует, что $k_{AB}=3$, тогда $k_{CD}=-1/3$. Напишем уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении: $y-y_1 = k(x-x_1)$. Подставив в уравнение координаты точки C и угловой коэффициент k_{CD} получим искомое уравнение высоты CD: $y-6=-\frac{1}{3}(x-11);\quad 3y-18=-x+11;\quad x+3y-29=0$ (CD). 3. Определим координаты точки E. Применяем формулы деления отрезка пополам: $x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$. Используя координаты вершин B и C получаем: $x=\frac{1+11}{2}=6;\quad y=\frac{12+6}{2}=9,\quad E(6,9)$. По точкам A и E построим уравнение медианы AE: $\frac{y-3}{9-3}=\frac{x+2}{6+2};\quad \frac{y-3}{6}=\frac{x+2}{8};\quad \frac{y-3}{3}=\frac{x+2}{4}$.

	4. Уравнение окружности радикса R с центром в точке $K(a,b)$ имеет вид $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Так как по условию медиана AE является диаметром искомой окружности; то центр окружности K делит отрезок AE пополам. Находим координаты точки K: $x=\frac{-2+6}{2}=2;\quad y=\frac{3+9}{2}=6;\quad K(2{,}6)$. Чтобы найти радиус R окружности, достаточно найти расстояние между точками A и K. Известно, что расстояние d между двумя точками плоскости $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ определяется по формуле: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Подставив координаты точек A и K, получаем $AK=\sqrt{(2+2)^2+(6-3)^2}=5$, т.е. R=5. Следовательно, $(x-2)^2+(y-6)^2=25$ – искомое уравнение окружности.
34	Составим уравнение прямой, проходящей через сторону BC $\frac{x+1}{4+1}=\frac{y}{1}$ или $\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}-y=0$. Найдем длину высоты AE по формуле (7): $\lvert AE\rvert=\frac{\left\lvert\frac{1}{5}\cdot 2-3+\frac{1}{5}\right\rvert}{\sqrt{\frac{1}{25}+1}}=\frac{2\frac{2}{5}}{\sqrt{\frac{26}{25}}}=\frac{12}{\sqrt{26}}$.
35	1. Выделим полные квадраты с x и y: $(x^2+2x+1)^2+2(y^2-4y+4)-1-8-10=0$, $(x+1)^2+2(y-2)^2-19=0$ 2. Осуществим параллельный перенос координатных осей по формулам $x+1=x'$, $y-2=y'$ в новое начало $O'(-1,2)$. В новой системе координат имеем: $x'^2+2y'^2-19=0$ или $\frac{x'^2}{19}+\frac{2y'^2}{19}=1$ в каноническом виде $\frac{x'^2}{19}+\frac{y'^2}{19/2}=1$. Получили эллипс с полуосями $a=\sqrt{19}$ и $b=\sqrt{9{,}5}$. 

36	1. Выделим полный квадрат с y: $$-8\left(y^2-\frac{1}{4}y+\frac{1}{64}\right)+\frac{1}{8}+7x-4=0$$  или $-8\left(y-\frac{1}{8}\right)^2=-7x+3\frac{7}{8}.$ Чтобы ввести формулы преобразования координат при параллельном переносе осей, [illegible] выражение $x\neq\alpha$ спра[illegible] $$-8\left(y-\frac{1}{8}\right)^2=-7\left(x-\frac{31}{8\cdot 7}\right).$$ 2. Преобразуем координаты: $x-\frac{31}{56}=x^{/}$, $y-\frac{1}{8}=y^{/}$. Тогда уравнение $-8y^{/2}=-7x^{/}$ или $y^{/2}=\frac{7}{8}x^{/}$ Определяем параболу в системе $O^{/}x^{/}y^{/}$ с центром $O^{/}\left(\frac{31}{56};\frac{1}{8}\right)$
37	$$4x^2-5(y^2+3y)+10=0,\quad 4x^2-5\left(y^2+3y+\frac{3^2}{4}\right)+\frac{5\cdot 9}{4}+10=0;$$ $$4x^2-5\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+21\frac{1}{4}=0;$$ $$x=x^{/},\quad y+\frac{3}{2}=y^{/}\to O^{/}\left(0;-\frac{3}{2}\right).$$ Имеем $4x^{/2}-5y^{/2}=-21{,}25$ или $-\frac{4x^{/2}}{21{,}25}+\frac{5y^{/2}}{21{,}25}=1.$

	Получим каноническое уравнение гиперболы $-\dfrac{x'^2}{\dfrac{21,25}{4}}+\dfrac{y'^2}{\dfrac{21,25}{5}}=1$ с мнимой полуосью $a=\sqrt{\dfrac{21,25}{4}}$ и $b=\sqrt{\dfrac{21,25}{5}}$.
38	Используя уравнение плоскости, получим 2(*x*-l)-l(*y*-2)+4(*z*-3)=0 или 2*x*-*y*+4*z*-l2-0.
39	Плоскость параллельна векторам ***a*** и ***b***, поэтому вектор нормали к плоскости ***n***(A,B,C) равен векторному произведению векторов): $$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k},$$ Уравнение искомой плоскости (1) имеет вид -2(*x*-l)-6(*y*-2)+5(*z*-3)=0 или -2*x*-6*y*+5*z*-l=0.
40	В соответствии с уравнением плоскости, проходящей через три точки, получаем $$\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z-3\\ -2 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}=(x-1)\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 0 & -2\end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -1 & -2\end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=$$ $$=2(x-1)-2(y-2)-(z-3)=2x-2y-z+5=0,$$ т.е. *2x-2y-z+5=0* и есть уравнение искомой плоскости.

Тема 1. Общие сведения о матрицах

Задание № 1

Заполните пропуски.

Какие виды матриц вы знаете:

1) ________________________ ; 2) ________________________;

3) ________________________; 4) ______________________.

Задание № 2

Приведите пример матрицы размерностью 3×4. И укажите ее элемент a_{12}

Задание № 3

Заполните пропуски.

Первые упоминания о матрицах дошли до нас ещё из - _________. В те давние времена матрицы называли «____________». Выдающийся математик Габриэль Крамер опубликовал свое, по сей день известное и используемое «Правило _________». Приблизительно в этот же период появился не менее популярный «Метод____________». Ну а непосредственно введение самого термина «матрица» - заслуга Джеймса Сильвестра. Термин появился в году.

Тема 2. Операции над матрицами

Задание № 4

Найти сумму матриц $A=\begin{pmatrix}21 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix}$.

Задание № 5

Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\\ -3 & 2\end{pmatrix}$.

Задание № 6

Предприятие выпускает продукцию трех видов: P_1, P_2, P_3 и использует сырье двух типов: S_1, S_2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, где каждый элемент $a_{ij}\,(i=1,2,3;\ j=1,2)$ показывает, сколько сырья j-го типа расходуется на производство единицы продукции i-го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой $C=\begin{pmatrix}100 & 80 & 130\end{pmatrix}$, стоимость единицы каждого типа сырья (ден.ед.) – матрицей-столбцом $B=\begin{pmatrix}30\\ 50\end{pmatrix}$. Определить затраты сырья, необходимые для планового выпуска продукции, и общую стоимость сырья.

Задание № 7

В таблице указано количество единиц продукции, отгружаемой ежедневно на молокозаводах 1 и 2 в магазины $М_1$, $М_2$ и $М_3$, причем доставка единицы продукции с каждого молокозавода в магазин $М_1$ стоит 50 ден. ед., в магазин $М_2$ - 70, а в $М_3$ - 130 ден. ед. Подсчитать ежедневные транспортные расходы каждого завода.

Молокозавод	Магазин		
	$М_1$	$М_2$	$М_3$
1	20	35	10
2	15	27	8

Тема 3. Определители квадратных матриц

Задание № 8

Вычислить определитель второго порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$.

Задание № 9

Вычислить определитель третьего порядка: $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Задание № 10

Вычислить определитель третьего порядка по теореме Лапласа: $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Задание № 11

Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, раскладывая его по первой строке.

Тема 4. Обратная матрица

Задание № 12

Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание № 13

Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Задание № 14

Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тема 5. Метод обратной матрицы. Формулы Крамера

Задание № 15

Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} 5x - y + 2z = -2 \\ 2x + 3y - 4z = 19 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}.$$

Задание № 16

Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Тема 6. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Задание № 17

На предприятии имеется четыре технологических способа изготовления изделий А и Б из некоторого сырья. В таблице указано количество изделий, которое может быть произведено из единицы сырья каждым из технологических способов.

Записать в математической форме условия выбора технологий при производстве из 94 ед. сырья 574 изделий А и 328 изделий Б.

Изделие	Выход из единицы сырья			
	I	II	III	IV
А	2	1	7	4

Б	6	12	2	3

Тема 7. Системы линейных однородных уравнений

Задание № 18

Решим систему.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Тема 8. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Задание № 19

Имеется баланс двух взаимосвязанных отраслей (машиностроение и энергетика) за предыдущий год:

Производство	Потребление		Валовой продукт
	э/г	м/с	
э/г	7	21	100
м/с	12	15	150

Найти конечный продукт каждой отрасли, чистую продукцию (чистый доход) каждой отрасли, матрицу коэффициентов прямых затрат. Какой будет валовой продукт каждой отрасли, если конечный продукт энергетической отрасли необходимо увеличить на 40 %, а машиностроения уменьшить на 20 %.

Задание № 20

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}15 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

А) Исследовать на продуктивность.

Б) Найти валовые выпуски отраслей, обеспечивающие заданное конечное потребление Y = (y_1, y_2, y_3) в размере y_1 =10 у.е., y_2 =20 у.е., y_3 =15 у.е.

Тема 9. Векторы на плоскости и в пространстве

Задание № 21

Даны два вектора $\vec{X} = (7, -3, 5)$ и $\vec{Y} = (1, 9, 4)$. Исследовать их на ортогональность

Задание № 22

Будут ли векторы $\vec{A}=(2,4)$ и $\vec{B}=(5,1)$ линейно зависимыми?

Задание № 23

Будут ли векторы $\vec{A}=(2,4)$, $\vec{B}=(5,1)$ и $\vec{C}=(2,1)$ линейно зависимыми?

Задание № 24

Доказать, что векторы $\overrightarrow{a_1}=(2,0,0)$, $\overrightarrow{a_2}=(0,-1,1)$, $\overrightarrow{a_3}=(0,1,4)$ образуют базис в R^3.

Тема 10. Линейные операторы

Задание № 25

Доказать, что образ вектора Y находится по формуле: $Y = A \cdot X$, где А-матрица линейного оператора

Тема 11. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Задание № 26

Структурная матрица торговли трех стран имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & 04 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Найти соотношение национальных доходов этих стран для сбалансированной торговли.

Тема 12. Квадратичные формы. Линейная модель обмена

Задание № 27

Найти матрицу квадратичной формы

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+x_2^2-5x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3+8x_2x_3 .$$

Задание № 28

Найти характеристические числа квадратичной формы:

$$f(x,y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2.$$

Тема 13. Системы координат. Уравнение линии на плоскости

Задание № 29

Найти длину медианы CE в треугольнике ABC с вершинами: A (3,3), B (–1,1), C (0,1).

Задание № 30

Найти геометрическое место точек, удаленных от точки А(a,b) на одно и тоже расстояние R.

Задание № 31

Найти уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от прямой $x = -2$ и точки F (2,3).

Тема 14. Уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой

Задание № 32

Написать уравнение прямой, проходящей через точку Q(2,7) параллельно прямой $2x$-$4y$+3=0.

Задание № 33

Даны вершины треугольника ABC: A(–2,3), B(1,12), C(11,6). Найти:

1) уравнение стороны AB;
2) уравнение высоты CD, опущенной из вершины C на сторону AB;
3) уравнение медианы AE;
4) уравнение окружности, для которой медиана AE служит диаметром.

Задание № 34

В треугольнике с вершинами A(2,3), B(–1,0), C(4,1) найти длину высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

Тема 15. Окружность и эллипс. Гипербола и парабола

Задание № 35

Построить кривую $x^2+4x+2y^2-8y-10=0$.

Задание № 36

Построить кривую $-8y^2+2y+7x-4=0$.

Задание № 37

Построить кривую $4x^2-5y^2-15y+10=0$.

Тема 16. Окружность и эллипс. Гипербола и парабола

Задание № 38

Записать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (1, 2, 3), перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}$(2,-1,4).

Задание № 39

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (1,2,3) параллельно векторам $\boldsymbol{a}$(3,-1,0) и $\boldsymbol{b}$(2,l,2).

Задание № 40

Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1,2,3)$, $M_2(-1,1,1)$, $M_3(0,2,1)$.

2 ЭТАП – Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины

3.3. «Вопросы для проведения зачета»:

1. Дать определение понятия матрицы.
2. Перечислить типы матриц.
3. Дать сравнительную характеристику матрице-столбцу и матрице-строке.
4. Дать определение единичной матрицы.
5. Охарактеризовать свойство сложения матриц.
6. В чем заключается свойство умножения двух матриц?
7. Каким образом можно возвести матрицу в степень?
8. Сформулировать правило умножения матрицы на число.
9. Дать определение определителя матрицы.
10. Перечислить свойства определителей.
11. Как найти определитель методом разложения.
12. Рассказать правило треугольников вычисления определителей.
13. Дать определение понятию обратная матрица.
14. Назвать основное свойство обратной матрицы.
15. Рассказать алгоритм нахождения обратной матрицы.
16. Дать определение ранга матрицы.
17. Дать определение понятия системы линейных уравнений.
18. В чем заключается метод обратной матрицы решения систем линейных уравнений?
19. Сформулировать метод Крамера для решения системы.
20. Дать определение понятия алгебраические дополнения.
21. В чем заключается особенность метода Гаусса.
22. Рассказать алгоритм решения системы линейных уравнений методом Гаусса.
23. Дать сравнительную характеристику методу Гаусса и Крамера.
24. Доказать универсальность метода Гаусса.
25. Дать определение системы линейных однородных уравнений.
26. Дать определение понятия фундаментальной системы решений.
27. Сформулировать общее решение системы линейных однородных уравнений.
28. В чем заключается связь фундаментальной системы решений с рангом матрицы.

29. Сформулировать основную задачу межотраслевого баланса.
30. Каким образом вводятся коэффициенты прямых затрат?
31. Перечислить случаи, когда модель Леонтьева является продуктивной.
32. Рассказать алгоритм построения матрицы полных затрат.

3.4. «Вопросы для проведения экзамена»:

1. Векторы на плоскости и в пространстве.
2. Скалярное произведение векторов.
3. Векторное пространство.
4. Линейная зависимость векторов.
5. Линейное пространство.
6. Размерность и базис векторного пространства.
7. Векторное произведение векторов.
8. Смешанное произведение векторов.
9. Дать определение линейного оператора. Математические действия над линейным оператором.
10. Написать матричную форму линейного оператора. Дать определение нулевого оператора.
11. Дать определение собственного вектора линейного оператора.
12. Охарактеризовать зависимость матрицы линейного оператора от выбора базиса.
13. Дать определение собственного значения линейного оператора.
14. Написать матричную форму связи собственного вектора с собственным значением оператора.
15. Квадратичная форма. Приведение квадратичной формы к каноническому виду*.
16. Закон инерции квадратичных форм.
17. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы.
18. Критерий Сильвестра установления знакоопределенности квадратичной формы.
19. Уравнение линии на плоскости.
20. Уравнение прямой и различные формы ее математической записи.
21. Уравнение пучка прямых.
22. Общее уравнение прямой и его исследование.
23. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.
24. Расстояние от точки до прямой.
25. Уравнение плоскости в пространстве. Угол между плоскостями.
26. Уравнение прямой в пространстве. Угол между прямыми.
27. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
28. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей.
29. Расстояние от точки до плоскости.
30. Кривые второго порядка. Окружность.

31. Каноническое уравнение эллипса. Характеристическое уравнение эллипса.
32. Гипербола Характеристическое свойство гиперболы. Асимптоты гиперболы.
33. Парабола. Характеристическое свойство параболы и. Фокус и директрисы параболы.

Задания закрытого типа (Тестовые задания)

Общие критерии оценивания

№ п/п	Процент правильных ответов	Оценка
1	86 % – 100 %	5 («отлично»)
2	70 % – 85 %	4 («хорошо)
3	51 % – 69 %	3 (удовлетворительно)
4	50 % и менее	2 (неудовлетворительно)

Номер вопроса и проверка сформированной компетенции

№ вопроса	Код компетенции	№ вопроса	Код компетенции
1	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	11	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
2	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	12	ОПК-2
3	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	13	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
4	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	14	ОПК-2
5	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	15	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
6	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	16	ОПК-2
7	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	17	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
8	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	18	ОПК-2
9	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	19	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
10	ОПК-2	20	ОПК-2

Ключ ответов

№ вопроса	Верный ответ	№ вопроса	Верный ответ
1	1–Б; 2–А; 3–Г; 4–В	11	1,2
2	1	12	1
3	1–А; 2–В; 3–Б; 4–Г	13	1,3
4	4	14	1–Б; 2–А
5	4	15	1–В; 2–А; 3–Г; 4–Б
6	2,1,4,3,5	16	1
7	2	17	1–В; 2–А; 3– Б; 4– Г
8	2	18	1–Б; 2–В; 3–Г; 4–А
9	2	19	2,3
10	1,2	20	1–Б; 2–А; 3–Г; 4–В

Задание № 1

Установите соответствие между видами матриц и их понятиями.

Столбец 1		Столбец 2	
1	Равные	А	Квадратная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, а все остальные элементы равны нулю
2	Единичная	Б	Если они имеют одинаковые размеры и для каждой пары индексов выполняется равенство $a_{ij}= b_{ij}$.
3	Транспонированная	В	Элементы такой матрицы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны.
4	Симметричная	Г	Матрица, получающаяся из матрицы А заменой строк столбцами с сохранением их порядка.

Задание № 2

Произведение матриц $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ равно:

1. $\begin{pmatrix} 18 & 15 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} -11 & -10 & -29 \\ -11 & -10 & -29 \\ -5 & -7 & -14 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 19 & 15 \\ 24 & 18 \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 10 & 10 & 29 \\ 11 & 9 & 29 \\ 5 & 7 & 13 \end{pmatrix}$.

Задание № 3

Установить соответствие между матрицами и их определителями.

Столбец 1		Столбец 2	
1	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ -6 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	А	25
2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -10 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$	Б	-15
3	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	В	9
4	$\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$	Г	25

Задание № 4

Обратной к матрице $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$ является матрица:

1. $\begin{pmatrix} -8 & -1 \\ -23 & -3 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 1 \\ \frac{1}{23} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -23 & 8 \end{pmatrix}$.

Задание № 5

Решить система линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \\ -x_1 - x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6 \end{cases}.$$

1. $(3, -7, 1)$;
2. $(-8, 4, 1)$;
3. $(0, 0, 0)$;
4. $(2, 3, 1)$.

Задание № 6

Составьте правильную последовательность действий при решении системы методом Гаусса.

1. С помощью элементарных преобразований привести записанную матрицу к ступенчатому виду;
2. Записать расширенную матрицу исходной системы;
3. Начиная с последнего уравнения, найти все переменные;
4. По полученной ступенчатой матрице записать систему;
5. Сделать проверку.

Задание № 7

Система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ имеет:

1. одно ненулевое решение;
2. бесконечно много решений;
3. нет решений;
4. одно нулевое решение.

Задание № 8

В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл. ден. ед.

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2		
Производство	1	15	20	-	100
	2	40	30	-	150

Найти конечный продукт каждой отрасли.

1. 150 и 120;
2. 65 и 80;
3. 120 и 180;
4. 115 и 140.

Задание № 9

Определить вид зависимости для системы двух векторов: A_1 (-4, 2, 8); A_2 (14, -7, -28).

1. линейно зависима;

2. линейно независима;
3. линейно ортогональна;
4. линейно коллинеарна.

Задание № 10

Оператор называется линейным, если он обладает свойствами:

1. аддитивности;
2. однородности;
3. ассоциативности;
4. симметричности.

Задание № 11

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора A, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.

1. -5;
2. 7;
3. 2;
4. 0.

Задание № 12

Дана квадратичная форма $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 16x_1x_3$. Найти матрицу данной квадратичной формы.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & 5 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -16 \\ 4 & 5 & 0 \\ -16 & 0 & -8 \end{pmatrix}$;
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 2 & 2{,}5 & 0 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$;
5. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & 5 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$.

Задание № 13

Какие из уравнений задают линию?

1. $x^2 + y^2 = 4y$;
2. $x^2 + y^2 = 0$;
3. $x^2 = 2y$;

4. $x^2 + y^2 = -6$.

Задание № 14

Установите соответствие между условиями параллельности и перпендикулярности векторов $\vec{a} = (a_x, a_y)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y)$.

Столбец 1		Столбец 2	
1	Условие параллельности	А	$a_x b_x + a_y b_y = 0$
2	Условие перпендикулярности	Б	$\dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y}$

Задание № 15

Выберите верную формулу для нахождения следующих величин

Столбец 1		Столбец 2	
1	Угол между векторами	А	$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
2	Расстояние между точками	Б	$x = \dfrac{x_A + x_B}{2}, \quad y = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.
3	Деление отрезка в данном отношении	В	$\dfrac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$
4	Координаты середины отрезка	Г	$x = \dfrac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; \quad y = \dfrac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}$

Задание № 16

Дана точка M(-1,2). Найти уравнение прямой проходящей через эту точку перпендикулярно прямой $2x - y + 3 = 0$.

1. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$;
2. $y = x + 3$;
3. $y = -x + \frac{3}{2}$;
4. $y = -x - \frac{3}{2}$.

Задание № 17

Установите соответствие между линией и ее определением.

Столбец 1		Столбец 2	
1	Эллипс	А	Геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух

			данных точек (фокусов) той же плоскости есть постоянная величина
2	Гипербола	Б	Геометрическое место точек на плоскости, равноудалённых от данной прямой (называемой директрисой) и данной точки (называемой фокусом)
3	Парабола	В	Геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от каждой точки до двух точек F_1 и F_2 равна постоянной величине
4	Окружность	Г	Это множество всех точек на плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки

Задание № 18

Установите соответствие между линией и ее уравнением.

Столбец 1		Столбец 2	
1	Эллипс	А	$(x-3)^2+(y+5)^2=25$
2	Гипербола	Б	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{49}=1$
3	Парабола	В	$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{49}=1$
4	Окружность	Г	$x^2=4y$

Задание № 19

Даны точки $M_1(3;1;-8)$ $M_2(2;4;-3)$ $M_3(6;0;7)$ $M_4(-3;-1;0)$.

Определить какие из точек лежат на плоскости $2x-y+z+3=0$.

1. $M_3(6;0;7)$;
2. $M_1(3;1;-8)$;
3. $M_2(2;4;-3)$;
4. $M_4(-3;-1;0)$.

Задание № 20

Установите соответствие между видами уравнений плоскости и их аналитическим выражением.

Столбец 1		Столбец 2	
1	Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору n(A,B,C)	A	Ax+By+Cz+D=0

2	Общее уравнение плоскости	Б	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
3	Уравнение плоскости в отрезках	В	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$
4	Уравнение плоскости, проходящей через три точки	Г	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Задания открытого типа (типовые задания, ситуационные задачи)

Общие критерии оценивания

№ п/п	Процент правильных ответов	Оценка
1	86 % – 100 %	5 («отлично»)
2	70 % – 85 %	4 («хорошо)
3	51 % – 69 %	3 (удовлетворительно)
4	50 % и менее	2 (неудовлетворительно)

Номер вопроса и проверка сформированной компетенции

№ вопроса	Код компетенции	№ вопроса	Код компетенции
1	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	21	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
2	ОПК-2	22	ОПК-2
3	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	23	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
4	ОПК-2	24	ОПК-2
5	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	25	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
6	ОПК-2	26	ОПК-2
7	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	27	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
8	ОПК-2	28	ОПК-2
9	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	29	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3

10	ОПК-2	30	ОПК-2
11	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	31	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
12	ОПК-2	32	ОПК-2
13	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	33	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
14	ОПК-2	34	ОПК-2
15	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	35	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
16	ОПК-2	36	ОПК-2
17	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	37	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
18	ОПК-2	38	ОПК-2
19	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3	39	ОК-7 ОПК-2 ОПК-3
20	ОПК-2	40	ОПК-2

Ключ ответов к заданиям открытого типа

№ вопроса	Верный ответ
1	1) равные; 2) квадратные; 3) единичные; 4) диагональные.
2	Например, матрица $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ является матрицей порядка 3×4. Элемент $a_{12}=4$.
3	Первые упоминания о матрицах дошли до нас ещё из Древнего Китая. В те давние времена матрицы называли «волшебными квадратами». Выдающийся математик Габриэль Крамер опубликовал свое, по сей день известное и используемое «Правило Крамера». Приблизительно в этот же период появился не менее популярный «Метод Гаусса». Ну а непосредственно введение самого термина «матрица» - заслуга Джеймса Сильвестра. Термин появился в 1850 году.
4	$A+B=\begin{pmatrix} 20 & 6 & 3 \\ 5 & 5 & 11 \end{pmatrix}$

5	$AB=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&3&2\\0&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&5\\-3&2\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}2\cdot2+0\cdot1+1\cdot(-3)&2\cdot1+0\cdot5+1\cdot2\\-1\cdot2+3\cdot1+2\cdot(-3)&-1\cdot1+3\cdot5+2\cdot2\\0\cdot2+1\cdot1+4\cdot(-3)&0\cdot1+1\cdot5+4\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\-5&18\\-11&13\end{pmatrix}.$
6	<u>1способ</u>. Матрица затрат сырья $S=C\cdot A=\begin{pmatrix}100&80&130\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\5&2\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}730&980\end{pmatrix}.$ Общая стоимость сырья $Q=S\cdot B=(CA)B=70900.$ <u>2 способ</u>. Найдем матрицу стоимостей затрат сырья на единицу продукции, т.е. матрицу $R=A\cdot B=\begin{pmatrix}210\\250\\230\end{pmatrix}$, а затем стоимость сырья $Q=CR=C\cdot(AB)=70900.$ *Замечание.* На этом примере мы убедились в выполнении ассоциативного закона произведения матриц $(CA)B=C(AB)$.
7	Обозначим через А матрицу, данную нам в условии, а через В - матрицу, характеризующую стоимость доставки единицы продукции в магазины, т.е., $A=\begin{pmatrix}20&35&10\\15&27&8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}50&70&130\end{pmatrix}.$ Тогда матрица затрат на перевозки будет иметь вид: $AB^T=\begin{pmatrix}20&35&10\\15&27&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}50\\70\\130\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\cdot50+35\cdot70+10\cdot130\\15\cdot50+27\cdot70+8\cdot130\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4750\\3680\end{pmatrix}$ Итак, первый завод ежедневно тратит на перевозки 4750 ден. ед., второй - 3680 ден.ед.
8	В соответствие с формулой расчета определителя второго порядка получим: $\begin{vmatrix}1&-3\\5&2\end{vmatrix}=1\cdot2-5\cdot(-3)=2+15=17.$
9	Вычислим определитель по правилу треугольника. Получим: $\Delta=\begin{vmatrix}5&-1&2\\2&3&-4\\1&2&3\end{vmatrix}=5\cdot3\cdot3+(-1)\cdot(-4)\cdot1+2\cdot2\cdot2-$ $-1\cdot3\cdot2-2\cdot(-1)\cdot3-2\cdot(-4)\cdot5=45+4+8-6+6+40=97.$
10	$\Delta=\begin{vmatrix}2&3&1\\0&1&5\\4&2&-1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1&5\\2&-1\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}0&5\\4&-1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}0&1\\4&2\end{vmatrix}=$ $=2\cdot(-1-10)-3\cdot(0-20)+1(0-4)=34.$ Разложение было выполнено по элементам 1-ой строки.
11	Воспользуемся формулой Лапласа, выбрав для разложения определителя первую строку (i = 1):

	$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}$. Таким образом, $\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$ $4 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. Вычисляя каждый из определителей третьего порядка по правилу треугольников, получим: Δ = (3 + 2 + 10 – 6– 5 –2) – 2·(3 + 5 + 1 – 3 –1 – 5) + 3·(2 + 2 + 5 – 2 –10 – 1) – 4·(2 + 2 + 3 – 2 – 6 – 1) = 2 – 12 + 8 = – 2.
12	Определитель матрицы А равен: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-5) = 17$ Так, как $\Delta \neq 0$, то матрица А невырожденная и для нее существует обратная. Найдем обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{17} & -\frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix}$ Проверка: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{17} & -\frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 15}{17} & \frac{1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1}{17} \\ \frac{(-5) \cdot 2 + 2 \cdot 5}{17} & \frac{(-5) \cdot (-3) + 2 \cdot 1}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{17} & -\frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix}$
13	Определитель матрицы A вычислен ранее: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 34$ · Так, как $\Delta \neq 0$, то матрица A невырожденная и для нее существует обратная. Найдем алгебраические дополнения каждого элемента матрицы A:

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&5\\2&-1\end{vmatrix}=-1-10=-11;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&5\\4&-1\end{vmatrix}=-(0-20)=20;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&1\\4&2\end{vmatrix}=0-4=-4;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3&1\\2&-1\end{vmatrix}=-(-3-2)=5;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&1\\4&-1\end{vmatrix}=-2-4=-6;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&3\\4&2\end{vmatrix}=-(4-12)=8;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3&1\\1&5\end{vmatrix}=15-1=14;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&1\\0&5\end{vmatrix}=-(10-0)=-10;$$

$$A_{33}=(-1)^{3-3}\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}=2-0=2.$$

Следовательно: $$A^{-1}=\frac{1}{34}\begin{pmatrix}-11&5&14\\20&-6&-10\\-4&8&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{11}{34}&\frac{5}{34}&\frac{14}{34}\\\frac{20}{34}&\frac{-6}{34}&-\frac{10}{34}\\-\frac{4}{34}&\frac{8}{34}&\frac{2}{34}\end{pmatrix}.$$

Проверка: $$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&1\\0&1&5\\4&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{11}{34}&\frac{5}{34}&\frac{14}{34}\\\frac{20}{34}&-\frac{6}{34}&-\frac{10}{34}\\-\frac{4}{34}&\frac{8}{34}&\frac{2}{34}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot\left(-\frac{11}{34}\right)+3\cdot\frac{20}{34}+1\cdot\left(-\frac{4}{34}\right)&2\cdot\frac{5}{34}+3\cdot\left(-\frac{6}{34}\right)+1\cdot\frac{8}{34}&2\cdot\frac{14}{34}+3\cdot\left(-\frac{10}{34}\right)+1\cdot\frac{2}{34}\\0\cdot\left(-\frac{11}{34}\right)+1\cdot\frac{20}{34}+5\cdot\left(-\frac{4}{34}\right)&0\cdot\frac{5}{34}+1\cdot\left(-\frac{6}{34}\right)+5\cdot\frac{8}{34}&0\cdot\frac{14}{34}+1\cdot\left(-\frac{10}{34}\right)+5\cdot\frac{2}{34}\\4\cdot\left(-\frac{11}{34}\right)+2\cdot\frac{20}{34}-1\cdot\left(-\frac{4}{34}\right)&4\cdot\frac{5}{34}+2\cdot\left(-\frac{6}{34}\right)-1\cdot\frac{8}{34}&4\cdot\frac{14}{34}+2\cdot\left(-\frac{10}{34}\right)-1\cdot\frac{2}{34}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Ответ: $$A^{-1}=\frac{1}{34}\cdot\begin{pmatrix}-11&5&14\\20&-6&-10\\-4&8&2\end{pmatrix}.$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>14</td>
<td>

Левый минор четвертого порядка данной матрицы равен

$$\begin{vmatrix}3&-1&1&0&4\\2&-1&-3&4&-2\\1&0&2&-2&3\\2&3&-3&4&-1\end{vmatrix}=8$$

Следовательно, ранг матрицы равен 4

</td>
</tr>
<tr>
<td>15</td>
<td>

Запишем систему в матричном виде: $A\cdot\bar{x}=\bar{b}$,

</td>
</tr>
</table>

	где $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ – основная матрица системы, $\bar{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ – столбец неизвестных и $\bar{b}=\begin{pmatrix}-2\\ 19\\ 1\end{pmatrix}$ – столбец свободных членов. Так как главный определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix}5 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -4\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=97\neq 0$, то основная матрица системы A имеет обратную матрицу A^{-1}. Для нахождения обратной матрицы A^{-1}, вычислим алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A: $A_{11}=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=17,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=7,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-2,$ $A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-10,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=13,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=24,$ $A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-11,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=17.$ Из полученных чисел составим матрицу (причем алгебраические дополнения к строкам матрицы A запишем в соответствующие столбцы) и разделим ее на определитель Δ. Таким образом, мы нашли обратную матрицу: $A^{-1}=\frac{1}{97}\cdot\begin{pmatrix}17 & 7 & -2\\ -10 & 13 & 24\\ 1 & -11 & 17\end{pmatrix}.$ Решение системы находим следующим образом: $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{97}\cdot\begin{pmatrix}17 & 7 & -2\\ -10 & 13 & 24\\ 1 & -11 & 17\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\ 19\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{97}\cdot\begin{pmatrix}-34+133-2\\ 20+247+24\\ -2-209+17\end{pmatrix}=$ $=\frac{1}{97}\cdot\begin{pmatrix}97\\ 291\\ -194\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -2\end{pmatrix}.$ Таким образом, $x=1,\quad y=3,\quad z=-2.$
16	Вычислим определители Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&2&-1\\3&-3&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&-1\\-3&1\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}1&-1\\3&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1&2\\3&-3\end{vmatrix}=2(2-3)+(1+3)+(-3-6)=$$

$$=-2+4-9=-7,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&2&-1.\\2&-3&1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}2&-1\\-3&1\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}2&-1\\2&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2&2\\2&-3\end{vmatrix}=(2-3)+(2+2)+(-6-4)=$$

$$=-1+4-10=-7,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\3&2&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&-1\\2&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&-1\\3&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}=2(2+2)-(1+3)+(2-6)=8-4-4=0,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&2&2\\3&-3&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&2\\-3&2\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1&2\\3&-3\end{vmatrix}=2(4+6)+(2-6)+(-3-6)=20-4-9=7.$$

Тогда $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{-7}{-7}=1;\quad x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{0}{7}=0;\quad x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{7}{-7}=-1\cdot$

Ответ: x_1=1, x_2=0, x_3= -1.

17

Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 количество сырья, которое следует переработать по каждой технологии, чтобы выполнить плановое задание. Получим систему трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=94,\\2x_1+x_2+7x_3+4x_4=574,\\6x_1+12x_2+2x_3+3x_4=328.\end{cases}$$

Решаем ее методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&94\\2&1&7&4&574\\6&12&2&3&328\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&94\\0&-1&5&2&386\\0&6&-4&-3&-236\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&94\\0&-1&5&2&386\\0&0&26&9&2080\end{pmatrix}$$

Имеем: r (A) = r (A) = 3, следовательно, число главных неизвестных равно трем, одно неизвестное x_4 - свободное. Исходная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=94-x_4,\\-x_2+5x_3=386-2x_4,\\26x_3=2080-9x_4.\end{cases}$$

С математической точки зрения система имеет бесчисленное множество решений, т. е. неопределенна. С учетом реального экономического содержания неизвестные величины не могут быть отрицательными. Получаем вектор (0, 14, 80, 0) является решением данной системы.

18

Запишем матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&-3&4&2\\3&-2&5&3\\1&-4&3&1\end{pmatrix}$$

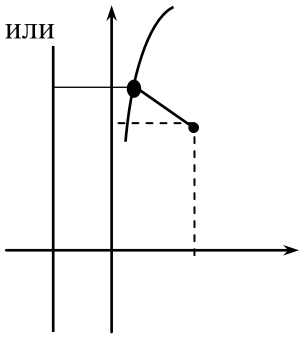
Преобразуем ее к виду: $\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-5&2&0\\0&-5&2&0\\0&-5&2&0\end{pmatrix}$. Очевидно, что r(A)=2.

	Пусть x_1, x_2 - базисные неизвестные, x_3, x_4 - свободные неизвестные. Заменим исходную систему системой из первых двух уравнений, коэффициенты которых входят в базисный минор, и перенесем базисные неизвестные в правые части уравнений: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 \\ 2x_1 - 3x_2 = -4x_3 - 2x_4 \end{cases}$. Пусть $x_3 = 1, x_4 = 0$. Тогда $x_1 = -1,4; x_2 = 0,4$. Если $x_3 = 0, x_4 = 1$, то $x_1 = -1, x_2 = 0$. Получена фундаментальная система решений: $X_1 = \begin{pmatrix} -1,4 \\ 0,4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Теперь общее решение системы можно записать в виде: $X = C_1X_1 + C_2X_2$, где C_1 и C_2 – любые произвольные числа.
19	Конечный продукт определяется по формуле: $Y = (E - A) \times X$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Матрица А – это матрица коэффициентов прямых затрат вида $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, где $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$. Имеем, $a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{7}{100} = 0,07$; $a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{21}{150} = 0,14$; $a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{12}{100} = 0,12$; $a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{15}{150} = 0,1$. Получили, $A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,1 \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов прямых затрат. Тогда $E - A = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,9 \end{pmatrix}$. С помощью Excel найдем $Y = (E - A) \times X = \begin{pmatrix} 72 \\ 123 \end{pmatrix}$ - конечный продукт отраслей. Найдем чистую продукцию отраслей, используя формулу $b_i = X_i - \sum_j x_{ij}$, где $j = 1,2,...,n.$ Имеем $b_1 = 100 - 7 - 12 = 81$ - чистая продукция энергетики; $b_2 = 150 - 21 - 15 = 64$ - чистая продукция машиностроения. Для нахождения валового продукта, соответствующего новому

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
конечному продукту вида $Y' = \begin{pmatrix} 100,8 \\ 98,4 \end{pmatrix}$, где
$y_1' = 72 + 72 \cdot 0,4 = 100,8; y_2' = 123 - 123 \cdot 0,2 = 98,4.$
Найдем матрицу полных затрат: $S = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,17 \\ 0,15 & 1,13 \end{pmatrix}$
Напомним, что обратная матрица для матрицы $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ вычисляется по формуле: $B^{-1} = \dfrac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
Новый валовой продукт $X = (E - A)^{-1} Y = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,17 \\ 0,15 & 1,13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100,8 \\ 98,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 127,6 \\ 126,3 \end{pmatrix}$.
Получили, что валовой продукт энергетики должен составлять 127,6 усл.ед., а машиностроения – 126,3 усл.ед.
</td>
</tr>
<tr>
<td>20</td>
<td>
$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 & 0,15 \\ 0,3 & 0,2 & 0,25 \end{pmatrix}$
Сумма элементов каждого столбца меньше единицы.
Следовательно, матрица А продуктивна.
Найдём обратную матрицу $(E\text{-}A)^{-1}$:
$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 & 0,15 \\ 0,3 & 0,2 & 0,25 \end{pmatrix},$
$E - A = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,3 & -0,4 \\ -0,5 & 0,7 & -0,15 \\ -0,3 & -0,2 & 0,75 \end{pmatrix}$
$\Delta(E - A) = 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,75 + (-0,3) \cdot (-0,15) \cdot (-0,3) + (-0,5) \cdot (-0,2) \cdot (-0,4)$
$- (-0,4) \cdot 0,7 \cdot (-0,3) - (-0,3) \cdot (-0,5) \cdot 0,75 - (-0,15) \cdot (-0,2) \cdot 0,9 = 0,4725 -$
$- 0,0135 - 0,04 - 0,084 - 0,1125 - 0,027 = 0,1955 \approx 0,2$
$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0,7 & -0,15 \\ -0,2 & 0,75 \end{vmatrix} = 0,075; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -0,3 & -0,4 \\ -0,2 & 0,75 \end{vmatrix} = 0,305; \quad A_{31} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -0,3 & -0,4 \\ 0,7 & -0,15 \end{vmatrix} = 0,73;$
$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -0,5 & -0,15 \\ -0,3 & 0,75 \end{vmatrix} = 0,42; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0,9 & -0,4 \\ -0,3 & 0,75 \end{vmatrix} = 0,555; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0,9 & -04 \\ -0,5 & -0,15 \end{vmatrix} = 0,335;$
$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -0,5 & 0,7 \\ -0,3 & -0,2 \end{vmatrix} = 0,31; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0,9 & -0,3 \\ -0,3 & -0,2 \end{vmatrix} = 0,27; \quad A_{33} = (-1)^{3-3} \begin{vmatrix} 0,9 & -0,3 \\ -0,5 & 0,7 \end{vmatrix} = 0,48.$
$A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12} A_{22} \ldots A_{n2} \\ \ldots \\ A_{1n} A_{2n} \ldots A_{nn} \end{pmatrix} \quad (\mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 2,53 & 1,56 & 1,66 \\ 2,15 & 2,84 & 1,71 \\ 1,59 & 1,38 & 2,46 \end{pmatrix}$
Вектор X = $(E\text{-}A)^{-1}$Y= $\begin{pmatrix} 2,53 & 1,56 & 1,66 \\ 2,15 & 2,84 & 1,71 \\ 1,59 & 1,38 & 2,46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,53 & 1,56 & 1,66 \\ 2,15 & 2,84 & 1,71 \\ 1,59 & 1,38 & 2,46 \end{pmatrix}$
Итак, конечное потребление Y = (10; 20; 15) будет обеспечено при валовых
</td>
</tr>
</table>

	выпусках 3-х отраслей X = (81,46; 103,96; 80,31). Полученный результат характеризует низкий технологический уровень отраслей, поскольку очень большое внутриотраслевое потребление.
21	$\vec{X}\cdot\vec{Y} = 7\cdot 1 + (-3)\cdot 9 + 5\cdot 4 = 0,$ т.е. $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ ортогональны.
22	Составим линейную комбинацию $\lambda\vec{A}+\beta\vec{B}=\vec{0}$. Подставим координаты и выполним действия над векторами: $\lambda(2,4)+\beta(5,1)=(0,0)\Rightarrow(2\lambda,4\lambda)+(5\beta,\beta)=(0,0)\Rightarrow(2\lambda+5\beta,4\lambda+\beta)=(0,0)$. В равных векторах должны быть равны соответствующие координаты: $\begin{cases}2\lambda+5\beta=0,\\4\lambda+\beta=0.\end{cases}$ Решив эту систему уравнений, получаем: $\lambda=0,\ \beta=0,$ а это значит, что $\vec{A}$ и $\vec{B}$ линейно независимы.
23	Составим линейную комбинацию и приравняем ее к $\vec{0}$: $\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}+\gamma\vec{C}=\vec{0};\quad \alpha(2,4)+\beta(5,1)+\gamma(2,1)=(0,0).$ Выполнив действия над векторами и приравняв координаты равных векторов, получим $\begin{cases}2\alpha+5\beta+2\gamma=0,\\4\alpha+\beta+8\gamma=0.\end{cases}$ Решим систему уравнений: $\alpha=\dfrac{\beta}{2},\gamma=-3\beta$. В этом решении число β играет роль параметра; задавая его произвольно, будем получать значения α и γ, которые вместе с β дают то или иное решение системы. Так, при $\beta\neq 0$ получим $\alpha\neq 0$ и $\gamma\neq 0$, из чего следует, что векторы $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ дают нулевую линейную комбинацию при ненулевых коэффициентах, т.е. они линейно зависимы.
24	Покажем, что равенство $\lambda_1\vec{a_1}+\lambda_2\vec{a_2}+\lambda_3\vec{a_3}=\vec{0}$ возможно только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$: $\lambda_1(2,0,0)+\lambda_2(0,-1,1)+\lambda_3(0,1,4)=(0,0,0);$ $(2\lambda_1,-\lambda_2+\lambda_3,\lambda_2+4\lambda_3)=(0,0,0),$ или $\begin{cases}2\lambda_1=0,\\-\lambda_2+\lambda_3=0,\\\lambda_2+4\lambda_3=0.\end{cases}$ Решив систему, получим $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$. Так как все $\lambda_i=0$ ($i=1,2,3$), то $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$ - линейно независимы. Они могут составить базис в R^3. Очевидно, любой новый набор из векторов $\vec{a_1}=(C_1,0,0)$, $\vec{a_2}=(0,C_2,0)$, $\vec{a_3}=(0,0,C_3)$ может тоже быть взятым в качестве базиса в R^3. Итак, базис может быть выбран неединственным образом.

25	$x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}$ $Ax = A(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1Ae_1 + \ldots + x_nAe_n = (e_1 \ldots e_n) \cdot x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \ldots + (e_1 \ldots e_n) \cdot x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \ldots \\ a_{nn} \end{pmatrix} =$ $(e_1 \ldots e_n)\begin{pmatrix} x_1a_{11} + \ldots + x_na_{1n} \\ \ldots \\ x_1a_{n1} + \ldots + x_na_{nn} \end{pmatrix} = (e_1 \ldots e_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = Y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n = (e_1 \ldots e_n) \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}$ $AX = Y$ $\boxed{Ax = e \cdot Ax,}$ где $e = (e_1 \ldots e_n)$
26	Находим собственный вектор x,отвечающий собственному значению $\lambda = 1$, решив уравнение $(A - E)x = 0$ или $$\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & -0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & -0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ методом Гаусса. Найдем $\mathrm{x} = (\mathrm{c}; 2\mathrm{c}; \mathrm{c})$. Полученный результат означает, что сбалансированность торговли трех стран достигается при соотношении их национальных доходов $1:2:1$.
27	Матрица данной квадратичной имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$
28	Коэффициенты матрицы $a_{11} = 17$, $a_{12} = 6$, $a_{22} = 8$. A = $\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. Составим характеристическое уравнение: $$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (17 - \lambda)(8 - \lambda) - 36 = 0;$$ $136 - 8\lambda - 17\lambda + \lambda^2 - 36 = 0$; $\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0$. Корни уравнения, являющиеся характеристическими числами равны $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 20$.
29	Так как E – середина отрезка AB, то по формуле (4) имеем: $$x_E = \frac{3-1}{2} = 1; \quad y_E = \frac{3+1}{2} = 2.$$ Длину медианы CE найдем по формуле: $$\lvert CE \rvert = \sqrt{(0-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}.$$
30	Если M(x,y) – произвольная точка искомого геометрического места, то всегда |AM|=R или $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R,$ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ – искомое уравнение.

31	Пусть M(x,y) – произвольная точка искомой линии. Расстояние от точки M до прямой $x = -2$ есть длина перпендикуляра MN, опущенного из M на прямую. Определим координаты точки N. Очевидно, что абсцисса точки N равна –2, а ордината точки N равна ординате точки M, т.е. N(–2,y). По условию задачи |MN|=|MF|. Следовательно, для любой точки M(x,y), принадлежащей искомой линии, справедливо равенство: $\sqrt{(x+2)^2+(y-y)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$ или $(x+2)^2=(x-2)^2+(y-3)^2$.  Упростим полученное уравнение: $x^2+4x+4=x^2-4x+4+(y-3)^2$ или $8x=(y-3)^2$. Это и есть искомое уравнение.
32	Найдем угловой коэффициент прямой $2x - 4y + 3 = 0$: $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}, \quad k=\frac{1}{2}$. Для искомой прямой угловой коэффициент будет таким же, так как прямые параллельны. Подставим данные в уравнение (6): $y-7=\frac{1}{2}(x-2)$.
33	1. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, имеет вид $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Чтобы найти уравнение стороны AB, подставим координаты точек A и B в уравнение прямой: $\frac{y-3}{12-3}=\frac{x-(-2)}{1-(-2)}; \quad \frac{y-3}{9}=\frac{x+2}{3}$; $y - 3 = 3x + 6$; $y = 3x + 9$ (AB). 2. Высота CD перпендикулярна стороне AB, а потому их угловые коэффициенты k_{CD} и k_{AB} удовлетворяют условию $k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}$. Из уравнения прямой AB следует, что $k_{AB}=3$, тогда $k_{CD}=-1/3$. Напишем уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении: $y-y_1 = k(x-x_1)$. Подставив в уравнение координаты точки C и угловой коэффициент k_{CD} получим искомое уравнение высоты CD: $y-6=-\frac{1}{3}(x-11); \quad 3y-18=-x+11; \quad x+3y-29=0$ (CD). 3. Определим координаты точки E. Применяем формулы деления отрезка пополам: $x=\frac{x_1+x_2}{2}; \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$. Используя координаты вершин B и C получаем: $x=\frac{1+11}{2}=6; \quad y=\frac{12+6}{2}=9, \quad E(6,9)$. По точкам A и E построим уравнение медианы AE:

	$\frac{y-3}{9-3}=\frac{x+2}{6+2}$; $\frac{y-3}{6}=\frac{x+2}{8}$; $\frac{y-3}{3}=\frac{x+2}{4}$. 4. Уравнение окружности радикса R с центром в точке $K(a,b)$ имеет вид $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Так как по условию медиана AE является диаметром искомой окружности; то центр окружности K делит отрезок AE пополам. Находим координаты точки K: $x=\frac{-2+6}{2}=2$; $y=\frac{3+9}{2}=6$; $K(2,6)$. Чтобы найти радиус R окружности, достаточно найти расстояние между точками A и K. Известно, что расстояние d между двумя точками плоскости $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ определяется по формуле: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Подставив координаты точек A и K, получаем $AK=\sqrt{(2+2)^2+(6-3)^2}=5$, т.е. $R=5$. Следовательно, $(x-2)^2+(y-6)^2=25$ – искомое уравнение окружности.
34	Составим уравнение прямой, проходящей через сторону BC $\frac{x+1}{4+1}=\frac{y}{1}$ или $\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}-y=0$. Найдем длину высоты AE по формуле (7): $\lvert AE\rvert=\frac{\left\lvert\frac{1}{5}\cdot 2-3+\frac{1}{5}\right\rvert}{\sqrt{\frac{1}{25}+1}}=\frac{2\frac{2}{5}}{\sqrt{\frac{26}{25}}}=\frac{12}{\sqrt{26}}$.
35	1. Выделим полные квадраты с x и y: $(x^2+2x+1)^2+2(y^2-4y+4)-1-8-10=0$, $(x+1)^2+2(y-2)^2-19=0$ 2. Осуществим параллельный перенос координатных осей по формулам $x+1=x'$, $y-2=y'$ в новое начало $O'(-1,2)$. В новой системе координат имеем: $x'^2+2y'^2-19=0$ или $\frac{x'^2}{19}+\frac{2y'^2}{19}=1$ в каноническом виде $\frac{x'^2}{19}+\frac{y'^2}{19/2}=1$. Получили эллипс с полуосями $a=\sqrt{19}$ и $b=\sqrt{9{,}5}$.

36	1. Выделим полный квадрат с *y*: $-8\left(y^2-\frac{1}{4}y+\frac{1}{8^2}\right)+\frac{1}{8}+7x-4=0$ или $-8\left(y-\frac{1}{8}\right)^2=-7x+3\frac{7}{8}.$ Чтобы ввести формулы преобразования координат при параллельном переносе осей, выделим выражение $x\neq\alpha$ справа: $-8\left(y-\frac{1}{8}\right)^2=-7\left(x-\frac{31}{8\cdot 7}\right).$  2. Преобразуем координаты: $x-\frac{31}{56}=x'$, $y-\frac{1}{8}=y'$. Тогда уравнение $-8y'^2=-7x'$ или $y'^2=\frac{7}{8}x'$ Определяем параболу в системе $O'x'y'$ с центром $O'\left(\frac{31}{56};\frac{1}{8}\right)$
37	$4x^2-5(y^2+3y)+10=0,\quad 4x^2-5\left(y^2+3y+\frac{3^2}{4}\right)+\frac{5\cdot 9}{4}+10=0;$ $4x^2-5\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+21\frac{1}{4}=0;$ $x=x',\quad y+\frac{3}{2}=y'\ \to O'\left(0;-\frac{3}{2}\right).$ Имеем $4x'^2-5y'^2=-21{,}25$ или $-\frac{4x'^2}{21{,}25}+\frac{5y'^2}{21{,}25}=1.$

	Получим каноническое уравнение гиперболы $-\frac{x'^2}{\frac{21{,}25}{4}}+\frac{y'^2}{\frac{21{,}25}{5}}=1$ с мнимой полуосью $a=\sqrt{\frac{21{,}25}{4}}$ и $b=\sqrt{\frac{21{,}25}{5}}$.
38	Используя уравнение плоскости, получим 2(*x*-l)-l(*y*-2)+4(*z*-3)=0 или 2*x*-*y*+4*z*-l2-0.
39	Плоскость параллельна векторам ***a*** и ***b***, поэтому вектор нормали к плоскости ***n***(A,B,C) равен векторному произведению векторов): $$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k},$$ Уравнение искомой плоскости (1) имеет вид -2(*x*-l)-6(*y*-2)+5(*z*-3)=0 или -2*x*-6*y*+5*z*-l=0.
40	В соответствии с уравнением плоскости, проходящей через три точки, получаем $$\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z-3\\ -2 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}=(x-1)\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 0 & -2\end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -1 & -2\end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=$$ $$=2(x-1)-2(y-2)-(z-3)=2x-2y-z+5=0,$$ т.е. *2x-2y-z+5=0* и есть уравнение искомой плоскости.

Задание № 1

Заполните пропуски.

Какие виды матриц вы знаете:

1) ________________________ ; 2) ________________________;

3) ________________________; 4) ________________________.

Задание № 2

Приведите пример матрицы размерностью 3×4. И укажите ее элемент a_{12}

Задание № 3

Заполните пропуски.

Первые упоминания о матрицах дошли до нас ещё из - _________. В те давние времена матрицы называли «____________». Выдающийся математик Габриэль Крамер опубликовал свое, по сей день известное и используемое «Правило _________». Приблизительно в этот же период появился не менее популярный «Метод___________». Ну а непосредственно введение самого термина «матрица» - заслуга Джеймса Сильвестра. Термин появился в году.

Задание № 4

Найти сумму матриц $A=\begin{pmatrix} 21 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Задание № 5

Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание № 6

Предприятие выпускает продукцию трех видов: P_1, P_2, P_3 и использует сырье двух типов: S_1, S_2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, где каждый элемент $a_{ij}\,(i=1,2,3;\ j=1,2)$ показывает, сколько сырья j-го типа расходуется на производство единицы продукции i-го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой $C=\begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix}$, стоимость единицы каждого типа сырья (ден.ед.) – матрицей-столбцом $B=\begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$. Определить затраты сырья, необходимые для планового выпуска продукции, и общую стоимость сырья.

Задание № 7

В таблице указано количество единиц продукции, отгружаемой ежедневно на молокозаводах 1 и 2 в магазины $М_1$, $М_2$ и $М_3$, причем доставка единицы продукции с каждого молокозавода в магазин $М_1$ стоит 50 ден. ед., в магазин $М_2$ - 70, а в $М_3$ - 130 ден. ед. Подсчитать ежедневные транспортные расходы каждого завода.

Молокозавод	Магазин		
	$М_1$	$М_2$	$М_3$
1	20	35	10
2	15	27	8

Задание № 8

Вычислить определитель второго порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$.

Задание № 9

Вычислить определитель третьего порядка: $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Задание № 10

Вычислить определитель третьего порядка по теореме Лапласа: $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Задание № 11

Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, раскладывая его по первой строке.

Задание № 12

Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание № 13

Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Задание № 14

Определить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задание № 15

Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} 5x - y + 2z = -2 \\ 2x + 3y - 4z = 19 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}.$$

Задание № 16

Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Задание № 17

На предприятии имеется четыре технологических способа изготовления изделий А и Б из некоторого сырья. В таблице указано количество изделий, которое может быть произведено из единицы сырья каждым из технологических способов.

Записать в математической форме условия выбора технологий при производстве из 94 ед. сырья 574 изделий А и 328 изделий Б.

Изделие	Выход из единицы сырья			
	I	II	III	IV
А	2	1	7	4
Б	6	12	2	3

Задание № 18

Решим систему.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Задание № 19

Имеется баланс двух взаимосвязанных отраслей (машиностроение и энергетика) за предыдущий год:

Производство	Потребление	Валовой

	э/г	м/с	продукт
э/г	7	21	100
м/с	12	15	150

Найти конечный продукт каждой отрасли, чистую продукцию (чистый доход) каждой отрасли, матрицу коэффициентов прямых затрат. Какой будет валовой продукт каждой отрасли, если конечный продукт энергетической отрасли необходимо увеличить на 40 %, а машиностроения уменьшить на 20 %.

Задание № 20

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 & 0,15 \\ 0,3 & 0,2 & 0,25 \end{pmatrix}$

А) Исследовать на продуктивность.

Б) Найти валовые выпуски отраслей, обеспечивающие заданное конечное потребление Y = (y_1, y_2, y_3) в размере y_1 =10 у.е., y_2 =20 у.е., y_3 =15 у.е.

Задание № 21

Даны два вектора $\overrightarrow{X} = (7,-3,5)$ и $\overrightarrow{Y} = (1,9,4)$. Исследовать их на ортогональность

Задание № 22

Будут ли векторы $\overrightarrow{A} = (2,4)$ и $\overrightarrow{B} = (5,1)$ линейно зависимыми?

Задание № 23

Будут ли векторы $\overrightarrow{A} = (2,4)$, $\overrightarrow{B} = (5,1)$ и $\overrightarrow{C} = (2,1)$ линейно зависимыми?

Задание № 24

Доказать, что векторы $\overrightarrow{a_1} = (2,0,0)$, $\overrightarrow{a_2} = (0,-1,1)$, $\overrightarrow{a_3} = (0,1,4)$ образуют базис в R^3.

Задание № 25

Доказать, что образ вектора Y находится по формуле: $Y = A \cdot X$, где А-матрица линейного оператора

Задание № 26

Структурная матрица торговли трех стран имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & 04 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Найти соотношение национальных доходов этих стран для сбалансированной торговли.

Задание № 27

Найти матрицу квадратичной формы

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3 \ .$$

Задание № 28

Найти характеристические числа квадратичной формы:

$f(x,y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2$.

Задание № 29

Найти длину медианы *CE* в треугольнике *ABC* с вершинами: *A* (3,3), *B* (–1,1), *C* (0,1).

Задание № 30

Найти геометрическое место точек, удаленных от точки A(*a,b*) на одно и тоже расстояние *R*.

Задание № 31

Найти уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от прямой $x = -2$ и точки F (2,3).

Задание № 32

Написать уравнение прямой, проходящей через точку Q(2,7) параллельно прямой $2x$-$4y$+3=0.

Задание № 33

Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(–2,3), *B*(1,12), *C*(11,6). Найти:

1) уравнение стороны *AB*;
2) уравнение высоты *CD*, опущенной из вершины *C* на сторону *AB*;
3) уравнение медианы *AE*;
4) уравнение окружности, для которой медиана *AE* служит диаметром.

Задание № 34

В треугольнике с вершинами *A*(2,3), *B*(–1,0), *C*(4,1) найти длину высоты, опущенной из вершины *A* на сторону *BC*.

Задание № 35

Построить кривую $x^2+4x+2y^2-8y-10=0$.

Задание № 36

Построить кривую $-8y^2+2y+7x-4=0$.

Задание № 37

Построить кривую $4x^2-5y^2-15y+10=0$.

Задание № 38

Записать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (1, 2, 3), перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}(2,-1,4)$.

Задание № 39

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (1,2,3) параллельно векторам $\boldsymbol{a}(3,-1,0)$ и $\boldsymbol{b}(2,l,2)$.

Задание № 40

Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1,2,3)$, $M_2(-1,1,1)$, $M_3(0,2,1)$.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Зачет и Экзамен является заключительным этапом процесса формирования компетенций обучающегося при изучении дисциплины и имеет целью проверку и оценку знаний обучающегося по теории и применению полученных знаний, умений и навыков при решении практических задач.

Зачет и Экзамен проводится по расписанию, сформированному учебно-методическим управлением, в сроки, предусмотренные календарным учебным графиком.

Зачет и Экзамен принимается преподавателем, ведущим лекционные занятия.

Зачет и Экзамен проводится только при предъявлении обучающимся зачетной книжки и при условии выполнения всех контрольных мероприятий, предусмотренных учебным планом и рабочей программой дисциплины.

Обучающимся на зачете и экзамене представляется право выбрать один из билетов. Время подготовки к ответу составляет 30 минут. По истечении установленного времени обучающийся должен ответить на вопросы экзаменационного билета.

Результаты зачета оцениваются по системе «зачтено»/«не зачтено» и заносятся в зачетно-экзаменационную ведомость и зачетную книжку. В зачетную книжку заносятся только «зачтено». Подписанный преподавателем экземпляр ведомости сдаётся не позднее следующего дня в деканат.

Результаты экзамена оцениваются по пятибалльной системе и заносятся в зачетно-экзаменационную ведомость и зачетную книжку. В зачетную книжку заносятся только положительные оценки. Подписанный преподавателем экземпляр ведомости сдаётся не позднее следующего дня в деканат.

В случае неявки обучающегося на зачет и экзамен в зачетно-экзаменационную ведомость делается отметка «не явка».

Обучающиеся, не прошедшие промежуточную аттестацию по дисциплине, должны ликвидировать академическую задолженность в установленном локальными нормативными актами Института порядке.